

**Математический анализ – 1**

2017/2018 учебный год

(*Б. С. Бычков, Д. А. Дагаев, Н. Е. Сахарова, И. Г. Эрлих*)

**Итоговая контрольная работа**

Фамилия, имя:

Результаты проверки:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma$

Оценка:

**Внимание!**

1. Не переворачивайте первую страницу до соответствующей команды.
2. Контрольная работа имеет формат «closed-book», то есть никакой литературой, тетрадьми, шаргалками пользоваться не разрешается.
3. Выходить во время контрольной работы можно, возвращаться — нельзя.
4. Все вещи должны быть сложены на подоконник. Телефоны должны быть выключены и также убраны на подоконник. С собой можно взять 2 ручки, бутылку воды, шоколадку (но принимайте во внимание пункт 3).
5. Не разрешается разговаривать с однокурсниками. Если возникает какой-либо вопрос, то необходимо поднять руку.
6. Везде, где не оговорено противное, следует записывать полные решения задач. Только лишь ответ принесет минимальное количество баллов, даже если он правильный.

**Удачи!**

**Задача 1.** (20 баллов) Какие из перечисленных утверждений являются верными? В каждом пункте начните ответ со слов «Верно» или «Неверно». Приведите доказательство или контр-пример.

1. Если функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  поточечно (то есть при каждом  $x$ ) сходится на  $[0, 1]$  к  $a(x)$  и  $a_n(x) \geq 0$  при всех  $x$  и  $n$ , то функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n(x)}$  поточечно (то есть при каждом  $x$ ) сходится на  $[0, 1]$  к  $\sqrt{a(x)}$ .

2. Если пределы  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \overline{o}(x^5)}{g(x)}$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$  существуют, то они равны.

3. Произведение двух различных иррациональных чисел является иррациональным числом.

4. Для любой интегрируемой на  $[-2,2]$  нечетной функции  $f(x)$  определенный интеграл  $\int_{-2}^2 f(x)dx$  равен нулю.

5. Если каждая точка множества  $A$  является предельной точкой множества  $A$ , то множество  $A$  является замкнутым.

**Задача 2.** (4 балла) Дана функция  $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 8$ . Найдите точки локальных и глобальных экстремумов функции  $g(x) = \int_{-3}^x f(t)dt$ , определенной на множестве  $x \geq -3$ .

**Задача 3.** (5 баллов) Пусть  $f(x)$  дифференцируема на  $\mathbb{R}$ , причем  $m \leq f'(x) \leq M$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Пусть  $f(x_0) = 1$ . Предложите И докажите верхнюю и нижнюю оценки для  $f(2x_0)$ .

**Задача 4.** (12 баллов) Последовательности  $p_n$  и  $q_n$  определяются формулами

$$p_1 = a, \quad p_{n+1} = \sqrt{p_n q_n}, \quad q_1 = b, \quad q_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2},$$

где  $a, b \geq 0$ .

1. Докажите, что для любых двух неотрицательных чисел  $x$  и  $y$  выполняется неравенство  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ .
2. Докажите, что последовательность  $p_n$  сходится.
3. Докажите, что последовательность  $q_n$  сходится.
4. Докажите, что пределы последовательностей  $p_n$  и  $q_n$  равны.



**Задача 5.** (15 баллов) Вычислите пределы:

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x \cdot \dots \cdot \sin 2048x}{\ln(1 + x) \cdot \ln(1 + 2x) \cdot \ln(1 + 4x) \cdot \dots \cdot \ln(1 + 2048x)}$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1}$



**Задача 6.** (20 баллов) Найдите интегралы:

1.  $\int_0^1 \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1} dx$

2.  $\int \arcsin 2x dx$

3.  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 4x dx$

4.  $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 1} dx$

5.  $\int \frac{2 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x - 2} dx$

**Задача 7.** (12 баллов) Исследуйте ряд на сходимость:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n$  — арифметическая прогрессия

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 16n + 12}$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Задача 8.** (12 баллов) Дана функция  $f(x) = e^{2x-x^2+1}$ . Постройте эскиз графика  $f(x)$ . Укажите область определения  $f(x)$ . Укажите точки разрыва. Укажите интервалы возрастания и убывания. Найдите локальные и глобальные экстремумы и точки экстремумов. Найдите вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Укажите промежутки, на которых функция  $f(x)$  выпукла и вогнута, а также точки перегиба.





