

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Билеты к коллоквиуму (5 декабря 2020 г.)***И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих***Билет №1**

1. Бесконечные пределы (∞ , $+\infty$, $-\infty$). Предел q^n при $n \rightarrow \infty$.
2. Старшие производные. Выпуклость. Эквивалентность трёх утверждений о выпуклости дифференцируемой функции (выпуклость вниз, возрастание производной, график проходит над касательной в любой точке). Точки перегиба. (Для простоты можно дать определение для функции с непрерывной второй производной.)

Билет №2

1. Предельный переход в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.
2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Её применение для приближённого вычисления значений функций.

Билет №3

1. Способы доказательства: метод математической индукции, доказательство от противного. Неравенство Бернулли.
2. Производная функции одной переменной. Геометрическая интерпретация производной. Уравнение касательной. Непрерывность дифференцируемой функции.

Билет №4

1. Последовательность и ее свойства: ограниченные последовательности, монотонные последовательности. Арифметические действия с последовательностями.
2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Её применение для вычисления пределов. Достаточное условие экстремума (через вторую производную).

Билет №5

1. Арифметика пределов последовательности: теорема о пределе произведения.
2. Теорема Коши. Правило Лопиталья (доказательство для случая $0/0$, предел в конечной точке).

Билет №6

1. Функция одной переменной и ее график. Основные типы преобразования графиков функций. Ограниченные и неограниченные функции. Точки локального экстремума.
2. Производная композиции функций.

Билет №7

1. Асимптоты и их нахождение.
2. Производная обратной функции. Производные корня, логарифма, обратных тригонометрических функций.

Билет №8

1. Арифметика пределов последовательности: теорема о пределе суммы двух последовательностей.
2. Ограниченность непрерывной на отрезке функции. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своей точной верхней и нижней грани.

Билет №9

1. Высказывания, предикаты, кванторы. Алгебра логики. Отрицание утверждения с кванторами.
2. Непрерывность функции. Арифметические действия над непрерывными функциями. Исследование непрерывности полинома, рациональных функций, корня, тригонометрических функций.

Билет №10

1. Арифметика пределов последовательности: теорема о пределе частного двух последовательностей.
2. Обратная функция. Логарифм, свойства логарифмов. Непрерывность обратной к непрерывной функции.

Билет №11

1. Подпоследовательность. Предельная точка последовательности. Теорема Больцано — Вейерштрасса.
2. Необходимое условие точки локального экстремума дифференцируемой функции (вместе с теоремой о том, как ведёт себя функция вблизи точки с положительной / отрицательной производной)

Билет №12

1. Ограниченные множества. Верхняя и нижняя грань. Точная верхняя и нижняя грань. Теорема о существовании точной верхней и нижней грани (без доказательства). Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.
2. O -большие и o -малые, их свойства.

Билет №13

1. Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.
2. Теорема о пределе сложной функции. Композиция непрерывных функций.

Билет №14

1. Основные классы чисел (без построения аксиоматики действительного числа). Рациональные и иррациональные числа. Наибольший общий делитель. Представление рациональных чисел в виде несократимой дроби (доказательство единственности, можно сослаться без доказательства на утверждение, что $\text{НОД}(a, b) = sa + tb$ для целых s и t). Иррациональность корня из двух.
2. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Связь знака производной и возрастания/убывания функции на промежутке.

Билет №15

1. Односторонние пределы. Бесконечный предел. Пределы на бесконечности. Определение этих понятий по Коши и по Гейне. Их эквивалентность.
2. Вычисление производных. Производная суммы и произведения.

Билет №16

1. Предел функции в точке: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений.
2. Частные производные, их нахождение.

Билет №17

1. Экспонента вещественного числа (определение через предел последовательности, доказательство существования, доказательство, что для целых чисел x определение совпадает с e^x).
2. Первый замечательный предел.

Билет №18

1. Число e . (Доказательство существования, два способа представления, доказательство их эквивалентности.)
2. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции.