

НИУ ВШЭ, Факультет гуманитарных наук, 2020-21 уч. год.

Дискретная математика для лингвистов

Письменная домашняя работа

Фамилия и имя: _____

Вариант: Козлов Дмитрий Михайлович

Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается.

Желаем удачи!

Задание

Задача 1. Пусть $|A| = 2$, $|B| = 7$. Какое значение может принимать мощность множеств $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A \setminus B|$, $|A \Delta B|$?

Задача 2. Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2019?

Задача 3. Существуют ли такие множества A, B, C , что

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

Если да, приведите какой-нибудь пример. Если нет, докажите почему.

Задача 4. В выражении $(2 + a + b)^{10}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Какие коэффициенты будут при следующих слагаемых?

- $a^5 b^5$;
- $a^3 b^5$;
- b^2 ?

Задача 5. Переменчивая девочка Ирина любит надевать то кофточку и брючки, то платье и колготки. В шкафу у Ирины 5 платьев, 9 колготок, 6 кофточек и 7 брючек. Ирина чередует: день платье с колготками, день кофточка с брючками.

- Сколько дней Ирина может одеваться по своим правилам так, чтобы каждый день был новый комплект?
- Какое минимальное число элементов одежды нужно докупить, так, чтобы период «каждый день разный комплект» увеличился вдвое?
- Внезапно Ирина осознала, что её любимый зелёный цвет должен обязательно присутствовать в одежде. Сколько в этом случае дней можно одеваться по-разному, если у неё 1 зелёное платье, 4 зелёных колготок, 2 зелёные кофточки, 4 зелёных штанишек.

Задача 6. Найти количество слов длины 11 в русском алфавите, в которых буквы идут в алфавитном порядке (например, *агду*, *пръя*, *аря*).

Задача 7. Доказать, что любое число квадратов может быть разрезано так, чтобы из получившихся частей можно было сложить квадрат.

Задача 8. Построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму и совершенную конъюнктивную нормальную форму для следующих функций алгебры логики.

- $x y z i \oplus x z i \oplus x y i \oplus y z i \oplus x z \oplus y z \oplus z i \oplus y \oplus x \oplus 1$;

б. (10110100).

Задача 9. Выразить следующие функции алгебры логики формулами над множествами функций алгебры логики $\{x \mid y\}$, $\{x \oplus y, xy, 1\}$.

а. $x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$;

б. (01110100).

Задача 10. На сколько нулей заканчивается число 2017! (в десятичной записи)?

Задача 11. Найти наибольший общий делитель чисел 5321629 и 88331655.

Задача 12.

Найти наибольший общий делитель многочленов $x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 4$ и $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x + 6$.

Задача 13. На множестве натуральных чисел задан предикат $D(x, y)$, который принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда x делится на y . Используя символы функций алгебры логики, предикат $D(x, y)$, кванторы всеобщности и существования, записать следующие предикаты.

а. $P_{=1}(x)$, принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда $x = 1$;

б. $P_{=}(x, y)$, принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда $x = y$;

с. $P_{pr}(x)$, принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда x — простое число.

Задача 14. Найдите остаток от деления числа 2017^{2018} на

3; 5; 7; 15.

Задача 15. Найти основание d системы счисления, если известно, что

$$09328_d = 12372_{10}.$$

Задача 16. Найти наименьшее трёхзначное шестнадцатиричное число, двоичная запись которого содержит ровно 5 нулей.

Задача 17. Перевести число 180,555 в системы счисления с основаниями 2, 3, 16, 12 (с точностью до 5 знаков после запятой).

Задача 18. Делится ли число 910 056 063 042 033 на число 3 501 405 621 721?

Задача 19. На доске написано число 689 133 356 429 458 426. Раз в пять минут к доске подходит Саня, стирает написанное число и пишет вместо него сумму его цифр. Через некоторое время на доске осталась одна цифра. Какая?

Задача 20. Выписать двоичные представления всех чисел, которые больше чем 56_7 и меньше чем 31_{14} .

Задача 21. Случайным образом выбирается подмножество множества $\{1, 2, \dots, 3000\}$. Какова вероятность того, что ни один из элементов выбранного подмножества не делится ни на 3, ни на 7, ни на 11?

Задача 22. Сколько попарно неизоморфных простых графов, содержащих 10 вершин и 41 ребро существует?

Задача 23. В далёком государстве 55 городов, причём из каждого выходит не менее 28 автодорог, соединяющих с другими городами этого же государства (два города связаны не более чем одной дорогой, дороги двусторонние). Может ли путешественник объехать все города на машине?

Задача 24. Каждый из 187 студентов курса знаком не менее чем с 149 другими. Докажите, что среди них найдутся 5 студентов, имеющие одинаковое число знакомых.

Задача 25. Существует ли многогранник с нечётным числом граней, все грани которого — многоугольники с нечётным числом сторон.

Задача 26. Какое наименьшее число ребер надо удалить из полного графа на 11 вершинах, чтобы в получившемся графе не было ни одного цикла?

Задача 27. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$, $L_1 = (a \cup ca)^* \cdot b$, $L_2 = (bb \cup db \cup dc) \cdot b^*$. Построить диаграммы, задающие следующие языки:

- L_1 ;
- L_2 ;
- CL_1 ;
- $L_1 \cup L_2$;
- $L_2 \cdot L_1$;
- $(L_2)^*$.

Для упрощения изображений (диаграмм) можно вводить обозначения для уже построенных диаграмм в предыдущих пунктах (но даже в этом случае надо обязательно указывать начальную и финальные вершины для этих диаграмм)

Задача 28. Пусть $A = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $Q' = \{q_1 \cup q_2\}$, функция $G : A \times Q \rightarrow Q$ задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned} G(a, q_0) &= q_2; \\ G(b, q_0) &= q_2; \\ G(a, q_1) &= q_2; \\ G(b, q_1) &= q_0; \\ G(a, q_2) &= q_1; \\ G(b, q_2) &= q_3; \\ G(a, q_3) &= q_1; \\ G(b, q_3) &= q_1. \end{aligned}$$

Нарисовать диаграмму для автомата (A, Q, G, q_0, Q') и написать регулярное выражение для языка, представимого этим автоматом.

Задача 29. Язык задан диаграммой



Построить конечный автомат, который представляет тот же самый язык. Написать регулярное выражение для этого языка.

Задача 30. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{0, 1\}$. Привести пример распределения частот букв для алфавита A , при котором при кодировании его в алфавите B существует оптимальный код, содержащий однобуквенное слово и оптимальный код, не содержащий однобуквенного слова.

Задача 31. По каналу передавалось кодовое слово, построенное по методу Хэмминга. Ошибок не более одной. Могло ли придти следующее слово? Если да, то какое было исходное сообщение?

- а. 1000011000
- б. 0110001011
- с. 0100100100

Задача 32. Построить оптимальный алфавитный код (код с минимальной избыточностью), буквы кодируемого алфавита имеют следующие частоты выпадения: 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.07, 0.08, 0.1, 0.12, 0.12, 0.12, 0.14, кодирующий алфавит состоит из четырёх букв.

Задача 33. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ — множество вершин некоторого графа G . Определим на множестве V двуместный предикат $P(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y соединены ребром. Определим на множестве V двуместный предикат $R(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y совпадают.

Используя предикаты $P(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее (везде рассматривается простой граф)

- а. Граф G является двудольным.
- б. Граф G является деревом.

Задача 34. Выяснить, существует ли q -ичный код с минимальной избыточностью (оптимальный код), обладающий заданной последовательностью L длин кодовых слов:

- а. $q = 3$, $L = (1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$;
- б. $q = 3$, $L = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3)$;
- с. $q = 2$, $L = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 6)$.

Задача 35. Являются ли следующие языки регулярными?

- а. Язык над алфавитом $A = \{a, b\}$, содержащий все слова, в которых в которых букв a в 3 раза больше, чем букв b и не содержащий никаких других.
- б. Язык над алфавитом $A = \{a, b\}$, содержащий все слова, в которых идёт не менее двух одинаковых букв подряд и не содержащий никаких других.