

НИУ ВШЭ, Факультет гуманитарных наук, 2020-21 уч. год.

Дискретная математика для лингвистов

Письменная домашняя работа

Фамилия и имя: \_\_\_\_\_

Вариант: Бурлаков Филипп Юрьевич

### Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается.

Желаем удачи!

### Задание

**Задача 1.** Пусть  $|A| = 14$ ,  $|B| = 14$ . Какое значение может принимать мощность множеств  $|A \cup B|$ ,  $|A \cap B|$ ,  $|A \setminus B|$ ,  $|A \Delta B|$ ?

**Задача 2.** Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2018?

**Задача 3.** Существуют ли такие множества  $A, B, C$ , что

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset?$$

Если да, приведите какой-нибудь пример. Если нет, докажите почему.

**Задача 4.** В выражении  $(2 + a + b)^9$  раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Какие коэффициенты будут при следующих слагаемых?

- $a^4b^5$ ;
- $a^3b^4$ ;
- $b^2$ ?

**Задача 5.** Переменчивая девочка Ирина любит надевать то кофточку и брючки, то платье и колготки. В шкафу у Ирины 9 платьев, 8 колготок, 11 кофточек и 6 брючек. Ирина чередует: день платье с колготками, день кофточка с брючками.

- Сколько дней Ирина может одеваться по своим правилам так, чтобы каждый день был новый комплект?
- Какое минимальное число элементов одежды нужно докупить, так, чтобы период «каждый день разный комплект» увеличился вдвое?
- Внезапно Ирина осознала, что её любимый зелёный цвет должен обязательно присутствовать в одежде. Сколько в этом случае дней можно одеваться по-разному, если у неё 5 зелёных платьев, 3 зелёных колготок, 7 зелёных кофточек, 3 зелёных штанишек.

**Задача 6.** Найти количество слов длины 9 в русском алфавите, в которых буквы идут в алфавитном порядке (например, *агду*, *пръя*, *аря*).

**Задача 7.** Доказать, что любое число квадратов может быть разрезано так, чтобы из получившихся частей можно было сложить квадрат.

**Задача 8.** Построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму и совершенную конъюнктивную нормальную форму для следующих функций алгебры логики.

- $xyz \oplus xyi \oplus yzi \oplus xz \oplus xy \oplus yz \oplus zi \oplus y \oplus y \oplus 1$ ;

в. (10011010).

**Задача 9.** Выразить следующие функции алгебры логики формулами над множествами функций алгебры логики  $\{x \mid y\}$ ,  $\{x \oplus y, xy, 1\}$ .

а.  $\bar{x}y \vee \bar{x}y\bar{z}$ ;

б. (10110111).

**Задача 10.** На сколько нулей заканчивается число  $2019!$  (в десятичной записи)?

**Задача 11.** Найти наибольший общий делитель чисел 31534821 и 438700661.

**Задача 12.**

Найти наибольший общий делитель многочленов  $x^4+x^3+6x^2+3x+9$  и  $x^4+4x^3+13x^2+16x+21$ .

**Задача 13.** На множестве натуральных чисел задан предикат  $D(x, y)$ , который принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда  $x$  делится на  $y$ . Используя символы функций алгебры логики, предикат  $D(x, y)$ , кванторы всеобщности и существования, записать следующие предикаты.

а.  $P_{=1}(x)$ , принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда  $x = 1$ ;

б.  $P_{=} (x, y)$ , принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;

с.  $P_{pr}(x)$ , принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда  $x$  — простое число.

**Задача 14.** Найдите остаток от деления числа  $2017^{2018}$  на

3; 5; 7; 15.

**Задача 15.** Найти основание  $d$  системы счисления, если известно, что

$$22766_d = 62783_{10}.$$

**Задача 16.** Найти наименьшее трёхзначное шестнадцатеричное число, двоичная запись которого содержит ровно 5 нулей.

**Задача 17.** Перевести число 176,689 в системы счисления с основаниями 2, 3, 16, 12 (с точностью до 5 знаков после запятой).

**Задача 18.** Делится ли число 770 049 063 042 019 на число 3 501 405 656 721?

**Задача 19.** На доске написано число 689 173 256 449 451 476. Раз в пять минут к доске подходит Саня, стирает написанное число и пишет вместо него сумму его цифр. Через некоторое время на доске осталась одна цифра. Какая?

**Задача 20.** Выписать двоичные представления всех чисел, которые больше чем  $47_9$  и меньше чем  $33_{14}$ .

**Задача 21.** Случайным образом выбирается подмножество множества  $\{1, 2, \dots, 2000\}$ . Какова вероятность того, что ни один из элементов выбранного подмножества не делится ни на 3, ни на 5, ни на 11?

**Задача 22.** Сколько попарно неизоморфных простых графов, содержащих 14 вершин и 87 ребер существует?

**Задача 23.** В далёком государстве 81 город, причём из каждого выходит не менее 41 автодороги, соединяющих с другими городами этого же государства (два города связаны не более чем одной дорогой, дороги двусторонние). Может ли путешественник объехать все города на машине?

**Задача 24.** Каждый из 124 студентов курса знаком не менее чем с 93 другими. Докажите, что среди них найдутся 4 студента, имеющие одинаковое число знакомых.

**Задача 25.** Существует ли многогранник с нечётным числом граней, все грани которого — многоугольники с нечётным числом сторон.

**Задача 26.** Какое наименьшее число ребер надо удалить из полного графа на 12 вершинах, чтобы в получившемся графе не было ни одного цикла?

**Задача 27.** Пусть  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $L_1 = (a \cup cb)^* \cdot b$ ,  $L_2 = (cc \cup db \cup dc) \cdot c^*$ . Построить диаграммы, задающие следующие языки:

- $L_1$ ;
- $L_2$ ;
- $CL_1$ ;
- $L_1 \cup L_2$ ;
- $L_2 \cdot L_1$ ;
- $(L_2)^*$ .

Для упрощения изображений (диаграмм) можно вводить обозначения для уже построенных диаграмм в предыдущих пунктах (но даже в этом случае надо обязательно указывать начальную и финальные вершины для этих диаграмм)

**Задача 28.** Пусть  $A = \{a, b\}$ ,  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ,  $Q' = \{q_3\}$ , функция  $G : A \times Q \rightarrow Q$  задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned} G(a, q_0) &= q_3; \\ G(b, q_0) &= q_2; \\ G(a, q_1) &= q_3; \\ G(b, q_1) &= q_3; \\ G(a, q_2) &= q_1; \\ G(b, q_2) &= q_3; \\ G(a, q_3) &= q_0; \\ G(b, q_3) &= q_2. \end{aligned}$$

Нарисовать диаграмму для автомата  $(A, Q, G, q_0, Q')$  и написать регулярное выражение для языка, представимого этим автоматом.

**Задача 29.** Язык задан диаграммой



Построить конечный автомат, который представляет тот же самый язык. Написать регулярное выражение для этого языка.

**Задача 30.** Пусть  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ . Привести пример распределения частот букв для алфавита  $A$ , при котором при кодировании его в алфавите  $B$  существует оптимальный код, содержащий однобуквенное слово и оптимальный код, не содержащий однобуквенного слова.

**Задача 31.** По каналу передавалось кодовое слово, построенное по методу Хэмминга. Ошибок не более одной. Могло ли придти следующее слово? Если да, то какое было исходное сообщение?

- а. 1000011000
- б. 1111000110
- с. 0011110111

**Задача 32.** Построить оптимальный алфавитный код (код с минимальной избыточностью), буквы кодируемого алфавита имеют следующие частоты выпадения: 0.02, 0.05, 0.05, 0.06, 0.07, 0.07, 0.08, 0.1, 0.12, 0.15, 0.23, кодирующий алфавит состоит из пяти букв.

**Задача 33.** Пусть  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  — множество вершин некоторого графа  $G$ . Определим на множестве  $V$  двуместный предикат  $P(x, y)$ , который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины  $x$  и  $y$  соединены ребром. Определим на множестве  $V$  двуместный предикат  $R(x, y)$ , который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины  $x$  и  $y$  совпадают.

Используя предикаты  $P(x, y)$ ,  $R(x, y)$ , функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее (везде рассматривается простой граф)

- а. Граф  $G$  является двудольным.
- б. Граф  $G$  является деревом.

**Задача 34.** Выяснить, существует ли  $q$ -ичный код с минимальной избыточностью (оптимальный код), обладающий заданной последовательностью  $L$  длин кодовых слов:

- а.  $q = 3$ ,  $L = (1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ ;
- б.  $q = 3$ ,  $L = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3)$ ;
- с.  $q = 2$ ,  $L = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 6)$ .

**Задача 35.** Являются ли следующие языки регулярными?

- а. Язык над алфавитом  $A = \{a, b\}$ , содержащий все слова, в которых длины  $n^3$  для любого натурального  $n$  и не содержащий никаких других.
- б. Язык над алфавитом  $A = \{a, b\}$ , содержащий все слова, в которых имеется подслово  $abba$  и не содержащий никаких других.