НИУ ВШЭ, Факультет гуманитарных наук, 2020-21 уч. год.
Дискретная математика для лингвистов
Письменная домашняя работа
Фамилия и имя: ____________________
Вариант: Аксенова Людмила Олеговна

Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается.

Желаем удачи!

Задание

Задача 1. Пусть $|A| = 5$, $|B| = 3$. Какое значение может принимать мощность множеств $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A \backslash B|$, $|A \triangle B|$?

Задача 2. Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2019?

Задача 3. Существуют ли такие множества A, B, C, что

$$A \cap B \neq \varnothing, \quad A \cap C = \varnothing, \quad (A \cap B) \backslash C = \varnothing?$$

Если да, приведите какой-нибудь пример. Если нет, докажите почему.

Задача 4. В выражении $(4 + a + b)^{12}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Какие коэффициенты будут при следующих слагаемых?
a. $a^3 b^9$;
b. $a^5 b^3$;
c. b^4?

Задача 5. Переменчивая девочка Ирина любит надевать то кофточку и брючки, то платьице и колготки. В шкафу у Ирины 8 платьев, 8 колготок, 11 кофточек и 7 брючек. Ирина чередует: день платьице с колготками, день кофточка с брючками.
a. Сколько дней Ирина может одеваться по своим правилам так, чтобы каждый день был новый комплект?
b. Какое минимальное число элементов одежды нужно докупить, так, чтобы период «каждый день разный комплект» увеличился вдвое?
c. Внезапно Ирина осознала, что её любимый зелёный цвет должен обязательно присутствовать в одежде. Сколько в этом случае дней можно одеваться по-разному, если у неё 4 зелёных платья, 3 зелёных колготок, 7 зелёных кофточек, 4 зелёных штанишек.

Задача 6. Найти количество слов длины 14 в русском алфавите, в которых буквы идут в алфавитном порядке (напирмер, *агду*, *пръя*, *аря*).

Задача 7. Доказать, что любое число квадратов может быть разрезано так, чтобы из получившихся частей можно было сложить квадрат.

Задача 8. Построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму и совершенную конъюнктивную нормальную форму для следующих функций алгебры логики.
a. $xyu \oplus yzu \oplus xz \oplus xy \oplus zu \oplus y \oplus z \oplus 1$;

b. (00101100).

Задача 9. Выразить следующие функции алгебры логики формулами над множествами функций алгебры логики $\{x \mid y\}$, $\{x \oplus y, xy, 1\}$.
a. $x\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z}$;
b. (10001101).

Задача 10. На сколько нулей заканчивается число 2019! (в десятичной записи)?

Задача 11. Найти наибольший общий делитель чисел 13966145 и 498489805.

Задача 12.
Найти наибольший общий делитель многочленов $x^4+x^3+2x^2+1x+1$ и $x^4+3x^3+8x^2+7x+5$.

Задача 13. На множестве натуральных чисел задан предикат $D(x,y)$, который принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда x делится на y. Используя символы функций алгебры логики, предикат $D(x,y)$, кванторы всеобщности и существования, записать следующие предикаты.
a. $P_{=1}(x)$, принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда $x = 1$;
b. $P_{=}(x,y)$, принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда $x = y$;
c. $P_{pr}(x)$, принимающий значение «истина» тогда и только тогда, когда x — простое число.

Задача 14. Найдите остаток от деления числа 2017^{2018} на

$$3; \quad 5; \quad 7; \quad 15.$$

Задача 15. Найти основание d системы счисления, если известно, что

$$25624_d = 17275_{10}.$$

Задача 16. Найти наименьшее трёхзначное шестнадцатиричное число, двоичная запись которого содержит ровно 5 нулей.

Задача 17. Перевести число 105,489 в системы счисления с основаниями 2, 3, 16, 20 (с точностью до 5 знаков после запятой).

Задача 18. Делится ли число 770 056 063 049 027 на число 3 501 405 663 749?

Задача 19. На доске написано число 589 173 256 489 454 406. Раз в пять минут к доске подходит Саня, стирает написанное число и пишет вместо него сумму его цифр. Через некоторое время на доске осталась одна цифра. Какая?

Задача 20. Выписать двоичные представления всех чисел, которые больше чем 46_9 и меньше чем 35_{13}.

Задача 21. Случайным образом выбирается подмножество множества $\{1, 2, \ldots, 3000\}$. Какова вероятность того, что ни один из элементов выбранного подмножества не делится ни на 3, ни на 7, ни на 11?

Задача 22. Сколько попарно неизоморфных простых графов, содержащих 9 вершин и 32 ребра существует?

Задача 23. В далёком государстве 53 города, причём из каждого выходит не менее 27 автодорог, соединяющих с другими городами этого же государства (два города связаны не более чем одной дорогой, дороги двусторонние). Может ли путешественник объехать все города на машине?

Задача 24. Каждый из 160 студентов курса знаком не менее чем с 120 другими. Докажите, что среди них найдутся 4 студентов, имеющие одинаковое число знакомых.

Задача 25. Существует ли многогранник с нечётным числом граней, все грани которого — многоугольники с нечётным числом сторон.

Задача 26. Какое наименьшее число ребер надо удалить из полного графа на 9 вершинах, чтобы в получившемся графе не было ни одного цикла?

Задача 27. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$, $L_1 = (a \cup cb)^* \cdot d$, $L_2 = (aa \cup db \cup cd) \cdot c^*$. Построить диаграммы, задающие следующие языки:

a. L_1;
b. L_2;
c. $\complement L_1$;
d. $L_1 \cup L_2$;
e. $L_2 \cdot L_1$;
f. $(L_2)^*$.

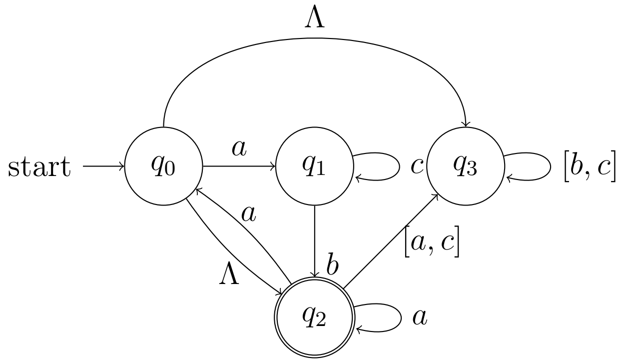
Для упрощения изображений (диаграмм) можно вводить обозначения для уже построенных диаграмм в предыдущих пунктах (но даже в этом случае надо обязательно указывать начальную и финальные вершины для этих диаграмм)

Задача 28. Пусть $A = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $Q' = \{q_1 \cup q_3\}$, функция $G : A \times Q \to Q$ задаётся следующим образом:

$$G(a, q_0) = q_3;$$
$$G(b, q_0) = q_2;$$
$$G(a, q_1) = q_0;$$
$$G(b, q_1) = q_3;$$
$$G(a, q_2) = q_1;$$
$$G(b, q_2) = q_3;$$
$$G(a, q_3) = q_2;$$
$$G(b, q_3) = q_0.$$

Нарисовать диаграмму для автомата (A, Q, G, q_0, Q') и написать регулярное выражение для языка, представимого этим автоматом.

Задача 29. Язык задан диаграммой



Построить конечный автомат, который представляет тот же самый язык. Написать регулярное выражение для этого языка.

Задача 30. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{0, 1\}$. Привести пример распределения частот букв для алфавита A, при котором при кодировании его в алфавите B существует оптимальный код, содержащий однобуквенное слово и оптимальный код, не содержащий однобуквенного слова.

Задача 31. По каналу передавалось кодовое слово, построенное по методу Хэмминга. Ошибок не более одной. Могло ли придти следующее слово? Если да, то какое было исходное сообщение?

a. 0110101011
b. 0001110101
c. 0000010010

Задача 32. Построить оптимальный алфавитный код (код с минимальной избыточностью), буквы кодируемого алфавита имеют следующие частоты выпадения: 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.07, 0.08, 0.1, 0.13, 0.16, 0.21, кодирующий алфавит состоит из четырёх букв.

Задача 33. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ — множество вершин некоторого графа G. Определим на множестве V двуместный предикат $P(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y соединены ребром. Определим на множестве V двуместный предикат $R(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y совпадают.

Используя предикаты $P(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее (везде расматривается простой граф)

a. Граф G является двудольным.
b. Граф G является деревом.

Задача 34. Выяснить, существует ли $q-$ичный код с минимальной избыточностью (оптимальный код), обладающий заданной последовательностью L длин кодовых слов:

a. $q = 3,\ L = (1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$;
b. $q = 3,\ L = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3)$;
c. $q = 2,\ L = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 6)$.

Задача 35. Являются ли следующие языки регулярными?

a. Язык над алфавитом $A = \{a, b\}$, содержащий все слова, в которых в которых букв a в 3 раза больше, чем букв b и не содержащий никаких других.
b. Язык над алфавитом $A = \{a, b\}$, содержащий все слова, в которых имеется подслово $abba$ и не содержащий никаких других.