Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Семинар 9. Кольца главных идеалов. Факториальность. Лемма Гаусса. (6 ноября 2020 года)

Задача 1. Докажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/(2) \simeq \mathbb{F}_2[x]/((x+1)^2)$ и тем самым $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/(2)$ есть делители нуля. Выведите из этого, что число 2 не является простым, и покажите, что оно является неприводимым в $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Задача 2. Докажите, что
(а) факторкольцо $\mathbb{Z}[i]/(2)$ не является полем;
(б) факторкольцо $\mathbb{Z}[i]/(3)$ является полем из 9 элементов;
(в) $\mathbb{Z}[i]/(n)$ является полем тогда и только тогда, когда n — простое число, не равное сумме двух квадратов целых чисел.

Задача 3. Разложите многочлен $x^6 + 27$ на неприводимые в $\mathbb{Q}[x]$.

Задача 4. (а) Может ли многочлен с целыми коэффициентами иметь нецелый рациональный корень?
(б) А если старший коэффициент равен единице?

Задача 5. Найдите все рациональные корни многочленов
а) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;
б) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$.

Задача 6. Пользуясь леммой Гаусса, докажите признак Эйзенштейна: пусть p — простое и многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ обладает свойством $p|a_i$, $i = 0, \ldots n-1$, $p \nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$. Тогда этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$.

Задача 7. Докажите, что следующие многочлены неприводимы над $\mathbb{Q}$:
(а) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;
(б) $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$, где p — простое;
(в) $x^3 + 2x^2 + 4x - 14$;
(г) $x^5 + 5x^2 + 1$.