Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Семинар 8. Идеалы. Факторкольца. Кольца главных идеалов. Евклидовы кольца. (30 октября 2020 года)

Задача 1. Докажите, что любой идеал в кольце $\mathbb{Z}$ является главным.

Задача 2. Рассмотрим идеал в $\mathbb{Q}(x)$, порожденный элементами $f(x) = 3x^3-2x^2+x+2$ и $g(x) = x^2-x+1$. Является ли он главным? Если да, то найдите тот элемент, которым он порождается.

Задача 3. Покажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + bw \in \mathbb{C},\ a, b \in \mathbb{Z},\ \omega^2 + \omega + 1 = 0\}$ является евклидовым относительно нормы $\nu(z) = |z|^2$.

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ целых гауссовых чисел. На лекции было доказано, что это кольцо евклидово с нормой $\nu(z) = |z|^2$.

Задача 4. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[i]$.

Задача 5. Пусть НОД$(a, b) = 1$. Пусть n —наименьшее натуральное число кратное $a + bi$ в кольце гауссовых чисел. Докажите, что $n = a^2 + b^2$.

Задача 6. Нарисуйте на комплексной плоскости все гауссовы числа, которые нацело делятся на $3 + 2i$.

Определение 1. Пусть K — целостное ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Необратимый элемент называется простым, если для любых $a, b \in K$ из того, что произведение ab делится на p, следует, что a или b делится на p.

Задача 7. Разложите на простые множители гауссовы числа $2, 3, 5, 7, 7 + i$.

Задача 8. Найдите наибольший общий делитель чисел $11 + 7i$ и $18 - i$ в кольце $\mathbb{Z}[i]$.