Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Семинар 7. Кольцо многочленов. Деление с остатком, НОД, алгоритм Евклида в кольце многочленов. Кольцо вычетов. (16 октября 2020 года)

Задача 1. Поделите с остатком многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$:
а) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 6x + 4,\ \ g(x) = x^2 - 2x + 1$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$;
б) $f(x) = x^7 + x^3 + x^2 + 1,\ \ g(x) = x^3 + 1$ в кольце $\mathbb{F}_2[x]$.

Задача 2. Поделите с остатком многочлен $4x^6 + 2x^4 - 3x + 7$ на $x + 1$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$.

Задача 3. Вычислите наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и его линейное выражение через $f(x)$ и $g(x)$:
(а) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ и $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$;
(б) $f(x) = x^5 + x^4 + 1$ и $g(x) = x^4 + x^2 + 1$ в кольце $\mathbb{F}_2[x]$.

Задача 4. В кольцах вычетов $\mathbb{F}_2[x]/(f)$ для следующих многочленов:
(а) $f = x + 1$;
(б) $f = x^2 + x + 1$;
(в) $f = x^2 + 1$;
(г) $f = x^3 + x + 1$;
(д) $f = x^4 + 1$.
укажите количество элементов, составьте таблицы умножения, найдите все обратимые элементы и делители нуля. Укажите, является ли кольцо полем. Изоморфно ли кольцо $\mathbb{F}_2[x]/(f)$ какому-то кольцу $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$?