

Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год**Алгебра****Семинар 5. Поля. Характеристика поля. Поле комплексных чисел. (2 октября 2020 года)**

Задача 1. а) Покажите, что любой автоморфизм поля оставляет на месте каждый элемент его простого подполя.

б) Имея в виду, что автоморфизмы поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ должны оставлять на месте рациональные числа, найдите все автоморфизмы $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Задача 2. Покажите, что между полями разной характеристики нет ненулевых гомоморфизмов.

Задача 3. Представьте в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функции $\sin 4x$ и $\cos 5x$.

Задача 4. Решите в комплексных числах уравнения:

а) $z^2 = i$; б) $z^2 - (3 - i)z + 4 - 3i = 0$; в) $z^3 = i$;
г) $\bar{z} = z^3$. д) $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$.

Задача 5. Вычислите сумму и произведение

а) всех корней степени n из единицы;

б) s -х степеней всех корней степени n из единицы для любого $s \in \mathbb{N}$.

Задача 6. Используя формулу бинома и формулу Муавра, вычислите:

а) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$; б) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$;

в) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$; г) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$

Задача 7. Вычислите:

а) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$; б) $\cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx$;

Задача 8. Покажите, что $\xi = \frac{2+i}{2-i}$ не является корнем из 1, хотя $|\xi| = 1$.