Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Семинар 4. Гомоморфизмы колец. Китайская теорема об остатках. (24/25 сентября 2020 года)

Задача 1. Согласно китайской теореме об остатках $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Постройте явно биективный гомоморфизм $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ и для каждого элемента укажите его образ.

Задача 2. Найдите все $x \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие системе сравнений

а) $\begin{cases} x \equiv 1 \mod 7 \\ x \equiv 0 \mod 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \equiv 0 \mod 7 \\ x \equiv 1 \mod 8 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 7 \\ x \equiv 7 \mod 8 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 3 \mod 6 \\ x \equiv 6 \mod 7 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x \equiv 1 \mod 8 \\ x \equiv 9 \mod 10 \end{cases}$

Задача 3. Найти все гомоморфизмы колец а) из $\mathbb{Z}_2$ в $\mathbb{Z}_3$; б) из $\mathbb{Z}_2$ в $\mathbb{Z}_4$; в) из $\mathbb{Z}_4$ в $\mathbb{Z}_2$; г) из $\mathbb{Z}_3$ в $\mathbb{Z}_6$; д) из $\mathbb{Z}_8$ в $\mathbb{Z}_4$. Укажите ядро и образ соответствующих гомоморфизмов.

Задача 4. Изоморфны ли кольца а) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_4$; б) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_8$; в) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$?

Задача 5. Зафиксируем некоторый класс $a \in \mathbb{Z}_n$ и рассмотрим отображение $\alpha : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ такое, что $\alpha(x) = ax \;\; \forall x \in \mathbb{Z}_n$. Является ли отображение α гомоморфизмом? Покажите, что обратимость класса a равносильна каждому из условий а) a не делитель нуля; б) α инъективно; в) α сюръективно; г) α биективно.

Задача 6. (а) Докажите, что любое кольцо из двух элементов изоморфно $\mathbb{Z}_2$.
(б) Докажите, что любое кольцо из трех элементов изоморфно $\mathbb{Z}_3$.