Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Семинар 3. Кольца, поля. Обратимые элементы кольца. (17/18 сентября 2020 года)

Определение 1. *Кольцом* называется множество K с операцией сложения и умножения, обладающими следующими свойствами:
1) относительно сложения K есть абелева группа
2) выполняется дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (a+b)c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in K.$$

Определение 2. Кольцо K называется *коммутативным*, если умножение в нем коммутативно

$$ab = ba \quad \forall a, b \in K.$$

Определение 3. Кольцо K называется *ассоциативным*, если умножение в нем ассоциативно

$$(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in K.$$

Определение 4. Элемент 1 кольца K называется *единицей*, если

$$a1 = 1a = a \quad \forall a \in K.$$

Задача 1. Докажите, что если в кольце K выполнено $1 = 0$, то K состоит только из одного элемента (нуля).

Задача 2. Из аксиом кольца и уже доказанных на лекции свойств абелевой группы выведите следующие свойства кольца K:
(а) $a0 = 0a = 0$ $\forall a \in K$;
(б) $a(-b) = (-a)b = -ab$ $\forall a, b \in K$;
(в) $a(b-c) = ab - ac$ и $(a-b)c = ac - bc$ $\forall a, b, c \in K$.

Задача 3. Какие из следующих числовых множеств образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения:
(а) множество $\mathbb{Z}$;
(б) множество $n\mathbb{Z}$ целых чисел, делящиеся на n;
(в) множество неотрицательных целых чисел;
(г) множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$;
(д) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели делят фиксированное число $n \in \mathbb{N}$;
(е) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели не делятся на фиксированное простое число p;
(ж) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$;
(з) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$?

(и) множество многочленов от переменных $x_1, \dots, x_N$ с коэффициентами из произвольного кольца K?
(к) множество всех вещественных матриц n на n (относительно матричного сложения и умножения)?
(л) множество вещественных симметрических матриц порядка n?
(м) множество верхних треугольных матриц порядка $n \geq 2$?
Если множество не является кольцом, укажите, какая аксиома не выполняется. Укажите, является ли кольцо коммутативным, ассоциативным, содержит ли единицу.

Определение 5. В произвольном кольце K с единицей элемент $a \in K$ называется *обратимым*, если существует элемент $a^{-1} \neq 0$ такой, что

$$aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$$

Определение 6. *Полем* называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором всякий ненулевой элемент обратим.

Задача 4. Для колец с единицей из задачи 3 найдите все обратимые элементы. Какие из перечисленных колец являются полями?

Определение 7. В произвольном кольце K элемент $a \in K$ называется *делителем нуля*, если $a \neq 0$ и $ab = 0$ для некоторого ненулевого $b \in K$.

Определение 8. Ненулевой элемент a кольца K называется *нильпотентом*, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Задача 5. Верно ли, что в любом коммутативном ассоциативном кольце с единицей
(а) произведение двух обратимых элементов является обратимым элементом?
(б) если произведение двух элементов является делителем нуля, то оба сомножителя являются делителями нуля?
(в) если произведение двух элементов является делителем нуля, то хотя бы один из сомножителей является делителем нуля?
(г) сумма двух обратимых элементов снова является обратимым?
(д) сумма двух делителей нуля снова является делителем нуля?
(е) произведение двух нильпотентных элементов является нильпотентным элементом?

Задача 6. Докажите, что множество обратимых элементов коммутативного ассоциативного кольца с единицей образуют мультипликативную абелеву группу.