Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Семинар 2. Основная теорема арифметики, кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$ (11 сентября 2020 года)

Задача 1. Существует ли 100 подряд идущих составных чисел?

Задача 2. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел.

Задача 3. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$.
(а) Найдите количество натуральных делителей числа n.
(б*) Докажите, что сумма натуральных делителей числа n равна

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}.$$

(в*) Число, равное сумме своих делителей за исключением самого себя, назовем *совершенным.* Докажите, что если числа p и $2^p - 1$ — простые , то число $2^{p-1}(2^p - 1)$ совершенно.

Определение 1. В произвольном кольце K элемент $a \in K$ называется *делителем нуля*, если $a \neq 0$ и $ab = 0$ для некоторого ненулевого $b \in K$.

Определение 2. Ненулевой элемент a кольца K называется *нильпотентом*, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Задача 4. Составьте таблицы сложения и умножения в кольцах $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$ и $\mathbb{Z}_6$. Найдите в этих кольцах все делители нуля, все нильпотенты и все обратимые элементы. Для обратимых элементов составьте таблицу обратных.

Задача 5. (а) Докажите, что всякий нильпотентный элемент является делителем нуля.
(б) Верно ли, что каждый делитель нуля является нильпотентом?

Задача 6. Проверьте, является ли данный класс $[m]_n$ обратимым, и если да, то явно вычислить класс $[m]_n^{-1}$. (Указание: используйте алгоритм Евклида.)
(а) $[235]_{142}$ в $\mathbb{Z}_{142}$ (б) $[413523]_{1443}$ в $\mathbb{Z}_{1443}$

Задача 7. (а) Какие элементы обратимы в $\mathbb{Z}_n$? Сформулируйте это условие с помощью НОД.
(б) При каких n все ненулевые элементы обратимы в $\mathbb{Z}_n$?

Задача 8. (а) При каких n в $\mathbb{Z}_n$ встречаются нильпотентные элементы?
(б) Как узнать, является $[m]_n$ нильпотентным? Как перечислить все нильпотентные элементы в $\mathbb{Z}_n$?
(в) Докажите, что сумма и произведение нильпотентных вычетов снова является нильпотентным.
(г) Вычислите количество нильпотентных элементов, используя разложение на простые множители $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$.