Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Семинар 13. Группы. Смежные классы. Действие группы на множестве. Орбита. Стабилизатор. (4 декабря 2020 года)

Задача 1. а) Пусть $\pi, \sigma \in S_n$, причем σ является циклом длины k. Докажите, что $\pi\sigma\pi^{-1}$ также является циклом длины k.
б) Докажите, что σ и $\pi\sigma\pi^{-1}$ имеют одинаковый цикловой тип.

Задача 2. а) Рассмотрим подмножество $V_4 \in S_4$, $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Докажите, что V_4 является подгруппой в S_4.
б) Опишите все левые и правые смежные классы группы S_4 по подгруппе V_4. в) Подгруппа H группы G называется нормальной, если $gH = Hg \ \forall g \in G$. Является ли V_4 нормальной в S_4?

Задача 3. Сколько перестановок в симметрической группе S_n имеют заданный цикловой тип, содержащий m_i циклов длины i для каждого $i = 1, 2, \dots, n$?

Задача 4. Опишите все смежные классы мультипликативной группы поля комплексных чисел по погруппе элементов единичной длины.

Задача 5. Пусть g_1, g_2 — элементы группы G и H_1, H_2 — подгруппы в G. Доказать, что следующие свойства эквивалентны:
а) $g_1H_1 \subseteq g_2H_2$
б) $H_1 \subseteq H_2$ и $g_2^{-1}g_1 \in H_2$

Задача 6. Найдите количество элементов в полной группе правильного тетраэдра. (подгруппа O_3 преобразований, переводящих правильный тетраэдр с центром в нуле в себя).

Задача 7. Доказать, что в группе диэдра все осевые симметрии образуют смежный класс по подгруппе вращений.