

Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год

Алгебра

Семинар 12. Группы. Циклические подгруппы. Порядок элемента. Система порождающих. (27 ноября 2020 года)

Задача 1. Докажите, что во всякой группе элементы x и yxu^{-1} имеют одинаковый порядок.

Задача 2. Докажите, что мультипликативная группа вычетов по модулю 7 является циклической, и найдите все её образующие.

Задача 3. Выпишите возможные значения порядков и количество элементов каждого порядка в циклической группе порядка 24.

Задача 4. (а) Сколько в S_n циклов длины k ?

(б) Какова четность цикла длины k ?

(в) Верно ли, что m -я степень цикла длины k является циклом длины k ?

Задача 5. Для перестановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 8 & 3 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

найдите ее цикловой тип, четность и вычислите σ^{15} .

Задача 6. Докажите, что группа S_n порождается транспозициями $(12), (13), \dots, (1n)$.

Задача 7. (а) Докажите, что группа D_5 порождается двумя элементами. Найдите порождающие и выразите остальные элементы через них.

(б) Докажите, что группа D_n порождается двумя элементами.

Задача 8. Сколько перестановок в симметрической группе S_n имеют заданный цикловой тип, содержащий m_i циклов длины i для каждого $i = 1, 2, \dots, n$?