

## Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год

## Алгебра

## Семинар 11. Группы (20 ноября 2020 года)

**Задача 1.** Выпишите таблицу умножения в группе  $S_3$ . Найдите все подгруппы в  $S_3$ .

**Задача 2.** Пусть в группе  $G$  выполнено соотношение  $xyz = 1$ . Верно ли что  $yzx = 1$ ? Верно ли  $yxz = 1$ ?

Группой диэдра  $D_n$  называется подгруппа все ортогональных линейных операторов евклидовой плоскости, сохраняющих правильный  $n$ -угольник в центре в начале координат.

**Задача 3.** Сколько элементов в группе  $D_2$ ? Зафиксируйте ортонормированный базис и выпишите матрицы соответствующих ортогональных операторов в этом базисе.

**Задача 4.** Опишите группу  $D_3$  (симметрий треугольника). Составьте таблицу умножения в  $D_3$ . Зафиксируйте ортонормированный базис и выпишите матрицы соответствующих ортогональных операторов в этом базисе. Покажите, что полученные матрицы являются подгруппой в группе ортогональных матриц  $2$  на  $2$ .

**Задача 5.** Занумеруем вершины треугольника числами  $1, 2, 3$  и сопоставим каждому движению из группы  $D_3$  осуществляемую им перестановку вершин. Мы получим отображение

$$\varphi : D_3 \rightarrow S_3.$$

Докажите, что это отображение является изоморфизмом.

**Задача 6.** Пусть  $f$  — какой-либо многочлен от  $n$  переменных. Рассмотрим, множество  $\text{Sym} f$  таких перестановок переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые сохраняют многочлен:

$$\text{Sym} f = \{ \sigma \in S_n : f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \}.$$

Докажите, что  $\text{Sym} f$  является подгруппой в  $S_n$ . Опишите эту подгруппу в  $S_4$  для многочлена  $f = x_1x_2 + x_3x_4$ .

**Задача 7.** Докажите, что непустое множество  $H$  группы  $G$  является подгруппой, если  $\forall x, y \in H$  элемент  $xy^{-1}$  принадлежит  $H$ .