Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Семинар 1. НОД, алгоритм Евклида, линейные диофантовы уравнения, основная теорема арифметики (4 сентября 2020 года)

Задача 1. Найдите наибольший общий делитель (НОД) чисел:

(а) $a = 20, b = 13$; (б) $a = 126, b = 91$; (в) $a = 7777777, b = 7777$.

(г) Для каждой пары чисел a и b из пунктов (а), (б) и (в) найдите такие целые x и y, что

$$ax + by = \text{НОД}(a, b).$$

Задача 2. Докажите, что если $\text{НОД}(a, b) = d$, то $\text{НОД}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

Задача 3. Птицефабрика фасует яйца в коробки, рассчитанные либо на 12, либо на 25 яиц. Сможет ли птицефабрика отсчитать покупателю ровно 401 яйцо, используя только такие коробки? Предполагается, что в каждой коробке лежит ровно столько яиц, на сколько она рассчитана.

Будем производить с матрицей $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ элементарные преобразования третьего типа, уменьшая модули правой части. То есть вычтем из первой строки матрицы вторую строчку, умноженную на натуральное число $q_1 = [a/b]$, в полученной матрице вычтем из второй строки первую, умноженную на натуральное число $[b/r_1]$. Через конечное число шагов мы придем к матрице $\left(\begin{smallmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} r \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Можно показать, что решения линейного диофантового уравнения $ax + by = \text{НОД}(a, b)$ имеют вид $x = c_{11} + tc_{21}, y = c_{12} + tc_{22}$. Попробуйте этот способ для решения задач.

Задача 4. Найдите все решения в целых числах диофантова уравнения

$$16x + 27y = 214.$$

Задача 5. Найдите частное и общее решение линейного диофантового уравнения (в целых числах)

(а) $17x + 23y = 38$; (б) $nx + (2n - 1)y = 3$; (в) $105x + 336y = 9$.

Задача 6. Из линейного представления для наибольшего делителя выведите следующие утверждения:
(а) Если a делится на c, и b делится на c, и $d = \text{НОД}(a, b)$, то d делится наc.
(б) Если $(a, b) = 1$ и bc делится на a, то c делится на a.

Задача 7. При каких натуральных n числа $3n + 1$ и $5n + 3$ взаимно просты?

Задача 8. Докажите, что $\text{НОД}(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{\text{НОД}(m,n)} - 1$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$. (Указание: докажите сначала равенство $\text{НОД}(2^n - 1, 2^m - 1) = \text{НОД}(2^{n-m} - 1, 2^m - 1)$, где $n \geq m$.)