Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Домашнее задание 8. Кольца главных идеалов. Факториальность. Лемма Гаусса. (Срок сдачи 13 ноября 2020 года строго перед семинаром)

Задача 1. Является ли факторкольцо $\mathbb{Z}[i]/(5)$ полем? Если да, то докажите, если нет, то объясните почему.

Задача 2. Разложите многочлен
(а) x^4+4 на неприводимые в $\mathbb{Z}[x]$;
(б) x^6+x^3+1 на неприводимые в $\mathbb{R}[x]$. (Подсказка: умножив этот многочлен на x^3-1, вы получите многочлен, у которого легко найти комплексные корни.)

Задача 3. Найдите все рациональные корни многочлена $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$.

Задача 4. Докажите, что следующие многочлены неприводимы в $\mathbb{Z}[x]$:
(а) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;
(б) x^4+x+1.

Задача 5. Введем в $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ следующую функцию $\nu : \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}$

$$\nu(a+b\sqrt{5}) = a^2-5b^2.$$

(а) Докажите, что $\nu(x)\nu(y)=\nu(xy)$ для любых $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Покажите, что $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ обратим тогда и только тогда, когда $\nu(x)=\pm 1$.
(б) Докажите, что элементы 2; $\sqrt{5}+1$; $\sqrt{5}-1$ неприводимы и попарно неассоциированы в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Тем самым 4 имеет в $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ два различных разложения на неприводимые множители.