Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Домашнее задание 7. Идеалы. Факторкольца. Кольца главных идеалов. Евклидовы кольца. (Срок сдачи 6 ноября 2020 года строго перед семинаром)

Задача 1. Рассмотрим идеал I в $\mathbb{F}_2[x]$, порожденный элементами $f(x) = x^5+x^3+x+1$ и $g(x) = x^4 + 1$. Является ли он I главным? Если да, то докажите и найдите тот элемент, которым он порождается.

Задача 2. Покажите, что в любом евклидовом кольце равенство $\nu(ab) = \nu(a)$ равносильно тому, что элемент b обратим.

Задача 3. Покажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ является евклидовым.

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ целых гауссовых чисел. На лекции было доказано, что это кольцо евклидово с нормой $\nu(z) = |z|^2$.

Задача 4. Найдите наибольший общий делитель чисел $5 + 3i$ и $6 - 4i$ в кольце $\mathbb{Z}[i]$. Однозначно ли он определен?

Определение 1. Пусть K — целостное ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Необратимый элемент называется простым, если для любых $a, b \in K$ из того, что произведение ab делится на p, следует, что a или b делится на p.

Задача 5. Докажите, что если p — простой, то в кольце $K/(p)$ нет делителей нуля. Верно ли обратное?