

Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год  
Алгебра

Домашнее задание 6. Поле комплексных чисел. (Срок сдачи 16 октября 2020 года строго перед семинаром)

**Задача 1.** Опишите в поле  $\mathbb{C}$  множество корней из следующих чисел:

а)  $\sqrt[8]{16}$ ;      б)  $\sqrt[4]{-72(1 - i\sqrt{3})}$ .

Ответ дайте в алгебраической форме.

**Задача 2.** Используя формулу бинома и формулу Муавра, вычислите:

а)  $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots$

б)  $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots$

**Задача 3.** а) Докажите равенство:

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \text{ где } x \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Вычислите  $\sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx$ ;

**Задача 4.** Пусть  $\mathbb{F}$  — конечное поле из  $q$  элементов характеристики  $p$ .

а) Докажите, что  $\forall a, b \ (a + b)^p = a^p + b^p$  и  $(ab)^p = a^p b^p$ ;

б) Сколько решений может иметь уравнение  $a^p = a$  в  $\mathbb{F}$ ?