

**Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год  
Алгебра****Домашнее задание 5. Поле комплексных чисел. (Срок сдачи 9 октября 2020 года строго перед семинаром)****Задача 1.** Решите в комплексных числах уравнения:

а)  $z^3 = -1$ ;      б)  $z^2 - (2i - 7)z + 13 - i = 0$ ;      в)  $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$ .

**Задача 2.** Вычислите:

а)  $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$ ;      б)  $\left(\frac{1-i \operatorname{tg} \alpha}{1+i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n$ .

**Задача 3.** а) Пользуясь формулой Муавра, выразите  $\sin 5\varphi$  через  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ .  
б) Применяя формулу понижения степени, получите выражение  $\sin 5\varphi$  через  $\sin \varphi$  и  $\cos 2\varphi$ . Найдите выражение для  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  в радикалах от рациональных чисел.**Определение 1.** Корень  $n$ -ой степени из 1 называется *первообразным*, если он не является корнем из 1 никакой меньшей степени.Напомним, что корни  $n$ -ой степени из 1 образуют абелеву группы по умножению, которую мы обозначим  $\mathbf{U}_n$ .**Задача 4.** Докажите, что следующие утверждения равносильны:

- а)
- $\xi$
- является первообразным корнем из единицы
- $n$
- ой степени;
- 
- б)
- $\xi = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$
- , где
- $k = 1, 2, \dots, n-1$
- и
- $\operatorname{НОД}(k, n) = 1$
- ;
- 
- в) любой элемент
- $\mathbf{U}_n$
- является некоторой степенью
- $\xi$
- .

**Определение 2.** *Круговым многочленом называется многочлен вида*

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{0 < k < n \\ \operatorname{НОД}(k, n) = 1}} \left( x - \cos \frac{2\pi k}{n} - i \sin \frac{2\pi k}{n} \right).$$

*Корнями этого многочлена являются первообразные корни  $n$ -ой степени из 1.***Задача 5.** а) Найдите  $\Phi_n(x)$  для  $n = 3, 4, 6, 12$  и покажите, что это многочлены с целыми коэффициентами.  
б) Найдите  $\Phi_p(x)$  для простого  $p$ .