Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Домашнее задание 4. Гомоморфизмы колец. Китайская теорема об остатках. (Срок сдачи 2 октября 2020 года строго перед семинаром)

Задача 1. Найдите все $x \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие системе сравнений

а) $\begin{cases} x \equiv 5 \mod 7 \\ x \equiv 6 \mod 11 \\ x \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x \equiv a \mod 4 \\ x \equiv b \mod 5 \\ x \equiv c \mod 9 \end{cases}$;

где a, b, c — произвольные натуральные числа.

Задача 2. Найти все гомоморфизмы колец а) из $\mathbb{Z}_6$ в $\mathbb{Z}_3$; б) из $\mathbb{Z}_3$ в $\mathbb{Z}_9$; в) из $\mathbb{Z}_4$ в $\mathbb{Z}_8$ и докажите, что других нет. Укажите ядро и образ соответствующих гомоморфизмов.

Задача 3. Пусть $\varphi : A \to B$ — ненулевой гомоморфизм полей.
а) Верно ли, что $\varphi(a^{-1}) = \varphi^{-1}(a)$ для любого ненулевого $a \in A$?
б) Верно ли, что образ φ является подполем в B?

Задача 4. Сколько попарно неизоморфных колец здесь выписано $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$? Для каждой пары либо постройте изоморфизм, либо докажите неизоморфность.

Задача 5. Через $\mathbb{Z}_n^*$ обозначается множество обратимых элементов в кольце $\mathbb{Z}_n$, а через $\varphi(n)$ — число его элементов. Функция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется функцией Эйлера.
а) Докажите, что для взаимно простых m и n изоморфизм $\mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ дает взаимно однозначное соответствие $\mathbb{Z}_{mn}^* \to \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*$, то есть $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
б) Докажите, что $\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$ для любого простого p.
в) Вычислите $\varphi(144)$ и $\varphi(1000)$.
г) Найдите все $k \in \mathbb{N}$ с $\varphi(k) = 10$.