Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Домашнее задание 3. Кольца, поля. Обратимые элементы кольца. (Срок сдачи 25 сентября 2020 года строго перед лекцией)

Задача 1. Какие из следующих числовых множеств образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения:
(а) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели являются степенями фиксированного простого числа p;
(б) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$, где $x, y, z \in \mathbb{Q}$?
(в) множество комплексных чисел вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{Z}$?
(г) множество всех вещественных ортогональных матриц n на n (относительно матричного сложения и умножения)?
(д) множество вещественных матриц порядка $n \geq 2$, у которых две последние строки нулевые?
(е) множество комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$, где $\bar{z}$ обозначает комплексное сопряжение?
Если множество не является кольцом, укажите, какая аксиома не выполняется. Если множество является кольцом, докажите это (для доказательства иногда удобно показать, что это подкольцо в каком-то известном нам кольце). Укажите, является ли кольцо коммутативным, ассоциативным, содержит ли единицу.

Задача 2. Для колец с единицей из задачи 1 найдите все обратимые элементы. Какие из перечисленных колец являются полями?

Задача 3. Верно ли, что в любом коммутативном ассоциативном кольце с единицей
(а) если произведение двух элементов является обратимым элементом, то оба сомножителя являются обратимыми?
(б) если произведение двух элементов является нильпотентным, то хотя бы один их сомножителей является нильпотентным?
(в) произведение любого элемента на нильпотентный является нильпотентным?

Задача 4. Докажите, что все обратимые элементы ассоциативного кольца с единицей образуют группу относительно умножения.