

**Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год****Алгебра****Домашнее задание 2. Основная теорема арифметики, кольцо вычетов  $\mathbb{Z}_n$**   
(Срок сдачи 18 сентября 2020 года строго перед лекцией)

**Задача 1.** Докажите, что натуральное число  $n$  является полным квадратом (то есть  $n = k^2$  для некоторого натурального  $k$ ) тогда и только тогда, когда  $n$  имеет нечетное число натуральных делителей.

**Определение 1.** Элемент  $a^{-1}$  кольца с единицей называется обратным к элементу  $a$ , если

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

**Задача 2.** Докажите, что в произвольном ассоциативном кольце с единицей никакой элемент не может иметь двух различных обратных элементов (но может не иметь ни одного).

**Задача 3.** В кольцах вычетов  $\mathbb{Z}_7$  и  $\mathbb{Z}_{12}$  найдите все делители нуля, все нильпотенты и все обратимые элементы. Для обратимых элементов составьте таблицу обратных.

**Задача 4.** Проверьте, является ли данный класс  $[m]_n$  обратимым, и если да, то явно вычислить класс  $[m]_n^{-1}$ . (Указание: используйте алгоритм Евклида.)

(а)  $[1071]_{425}$  в  $\mathbb{Z}_{425}$       (б)  $[8424]_{4195}$  в  $\mathbb{Z}_{4195}$

**Задача 5.** (а) Докажите, что при простом  $p$  в  $\mathbb{Z}_p$  любое уравнение первой степени вида

$$\alpha x + \beta = [0]_p, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$$

при ненулевом  $\alpha$  имеет единственное решение.

(б) Покажите, что если число  $n$  не простое, то уравнение  $\alpha x + \beta = [0]_n$  при ненулевом  $\alpha$  может как не иметь решений, так и иметь несколько решений. Как по  $\alpha = [a]_n$ ,  $\beta = [b]_n$  и  $n$  указать число решений?