Совместный бакалавриат НИУ ВШЭ и ЦПМ, 2020-21 уч. год
Алгебра
Домашнее задание 1. Алгоритм Евклида, линейные диофантовы уравнения (Срок сдачи 11 сентября 2020 года)

Задача 1. (а) Известно, что $au + bv = 1$, $a, b, u, v \in \mathbb{Z}$. Докажите, что НОД$(a, b) = 1$.
(б) Известно, что $au + bv = 2$, $a, b, u, v \in \mathbb{Z}$. Верно ли, что НОД$(a, b) = 2$?

Задача 2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД$(525, 231)$. Найдите такие целые x и y, что

$$525x + 231y = \text{НОД}(525, 231).$$

Задача 3. На семинаре разбирался такой способ. Будем производить с матрицей $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ элементарные преобразования третьего типа, уменьшая модули правой части. То есть вычтем из первой строки матрицы вторую строчку, умноженную на натуральное число $q_1 = [a/b]$, в полученной матрице вычтем из второй строки первую, умноженную на натуральное число $[b/r_1]$. Через конечное число шагов мы придем к матрице $\left(\begin{smallmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} r \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда решения линейного диофантового уравнения $ax + by =$ НОД(a, b) имеют вид $x = c_{11} + tc_{21}, y = c_{12} + tc_{22}$.
Решите таким способом уравнение $57x + 102y = 3$ в целых числах.

Задача 4. При каких натуральных n числа $n^2 + 1$ и $n + 3$ взаимно просты?

Задача 5. (а) Докажите, что число $2^{16} + 1$ взаимно просто с каждым из чисел $2^1 + 1$, $2^2 + 1$, $2^4 + 1$, $2^8 + 1$.
(Указание: воспользуйтесь формулой разложения на множители $(2^{16} - 1)$).
(б) Найдите НОД$(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1)$