

Коллоквиум по алгебре

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ СОВМЕСТНЫЙ БАКАЛАВРИАТ ЦПМ , ВТОРОЙ КУРС

декабрь 2020 г.

Блиц-опрос по теории

В качестве допуска к коллоквиуму студент получает три вопроса на знание определений и формулировок теорем из следующего списка. На эти вопросы надо ответить без подготовки. Ответивший на все три вопроса получает 2 балла, на два — 1 балл, для не ответивших на два из этих вопросов коллоквиум заканчивается.

Абелева группа (аддитивная, мультипликативная), подгруппа. Прямое произведение абелевых групп. Кольцо, подкольцо. Коммутативное кольцо, ассоциативное кольцо. Кольцо вычетов, обратимые элементы в кольце вычетов, когда кольцо вычетов является полем. Малая теорема Ферма. Кольцо формальных степенных рядов, кольцо многочленов. Кольцо вычетов по модулю многочлена, фактор по неприводимому многочлену и обратимость в кольце вычетов. Гомоморфизм колец, изоморфизм колец. Ядро и образ гомоморфизма. Формулировка китайской теоремы об остатках для колец вычетов, для колец вычетов в кольце многочленов от одной переменной. Алгоритм Евклида в кольце многочленов от одной переменной с коэффициентами из поля. Корень многочлена, теорема Безу. Неприводимый многочлен, лемма Гаусса. Евклидово кольцо. Идеал в коммутативном кольце, главный идеал. Кольцо главных идеалов, НОД в кольце главных идеалов. Факторкольцо. Делитель нуля, целостное кольцо. В целостном коммутативном кольце с единицей: простота, неприводимость, ассоциированность. Факториальность. Поле, подполе. Характеристика поля, простое подполе. Поле комплексных чисел, алгебраическая, тригонометрическая форма записи, формула Муавра, корни из единицы. Группа, подгруппа, циклическая группа. Действие группы на множестве, орбита, стабилизатор, смежный класс. Нормальная подгруппа, факторгруппа. Симметрическая группа, транспозиция, четность перестановки.

Далее студент получает билет с теоретическим вопросом и задачей. Вопрос и задача оцениваются из 4 баллов каждый. (Итого максимальная оценка за коллоквиум — $2+4+4=10$ баллов). Ответ на вопрос билета должен быть изложен с полными доказательствами. На подготовку отводится 30 минут, пользоваться при подготовке ничем нельзя.

Теоретические вопросы

1. Линейные диофантовы уравнения, общий вид решения. Основная теорема арифметики.
2. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$. Корректность определения. Обратимые элементы и делители нуля. Малая теорема Ферма.
3. Абелевы группы. Прямое произведение абелевых групп. Гомоморфизмы абелевых групп, ядро, образ. Доказать, что слой гомоморфизма φ абелевых групп над произвольной точкой b либо пуст, либо равен $a + \ker \varphi$, где $\varphi(a) = b$. Группа гомоморфизмов $\text{Hom}(A, B)$.

4. Прямое произведение колец. Свойства гомоморфизмов колец. Китайская теорема об остатках для $\mathbb{Z}_n$.
5. Поле. Простое подполе. Характеристика поля. Доказать, что в каждом поле P содержится только одно простое поле P_0 . Если $\text{char}(P) = 0$, то P_0 изоморфно $\mathbb{Q}$, если $\text{char}(P) = p$, то P_0 изоморфно $\mathbb{Z}_p$.
6. Построение поля комплексных чисел, доказательство, что это поле. Алгебраическая и тригонометрическая форма.
7. Доказать формулу Муавра. Корни из единицы n -ой степени в $\mathbb{C}$ образуют циклическую группу.
8. Доказать единственность поля комплексных чисел как целостного ассоциативного коммутативного кольца с единицей, которое является двумерным векторным пространством над $\mathbb{R}$.
9. Кольцо степенных рядов, кольцо многочленов. Деление с остатком в кольце многочленов. Схема Горнера. Теорема Безу.
10. Кольцо вычетов в кольце многочленов. Когда кольцо вычетов является полем. Примеры построения конечных полей. Китайская теорема об остатках для колец вычетов многочленов.
11. Идеал. Главный идеал. Доказать равносильность утверждений: коммутативное ассоциативное кольцо K с единицей — поле, в K нет нетривиальных идеалов. Факторизация и факторкольца. Гомоморфизм факторизации.
12. Евклидовы кольца. Примеры: целые числа, гауссовы целые числа, многочлены с коэффициентами из поля. Доказать, что евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.
13. Существование НОД и взаимная простота в кольце главных идеалов. Примеры: НОД в кольце целых чисел и кольце многочленов с коэффициентами из поля. Доказать эквивалентность утверждений для кольца K главных идеалов: факторкольцо $K/(p)$ — поле, p неприводим в K .
14. Доказать, что всякое кольцо главных идеалов факториально.
15. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Доказать лемму Гаусса.
16. Доказать, что любая конечная подгруппа в мультипликативной группе произвольного поля является циклической.
17. Любое конечное поле содержит p^r элементов, где p — простое, $p, r \in \mathbb{N}$. Доказать существование поля из p^r элементов для произвольного простого p и натурального n .
18. Доказать, что любые два поля из p^r элементов изоморфны.