

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год**  
**Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s19/g>)**  
**Семинар 3. Единственность решений и замены переменных (31.01.2020)**  
*И. Щуров, М. Матушко*

**Задача 1.** Найти все решения уравнения  $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$  с начальным условием  $x(0) = 0$ .

**Задача 2.** Рассмотрим задачу Коши:

$$xy' = 3y, \quad y(-1) = 1.$$

(a) Показать, что любая функция вида

$$y(x) = \begin{cases} -x^3, & x \leq 0; \\ Cx^3, & x > 0. \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению и начальному условию.

(b) Объяснить, почему это не противоречит теореме существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения?

**Задача 3.** [?] Подбирай подходящую замену решить уравнение.

- |                                      |                                       |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $y' = \frac{y(1+xy)}{x(1-xy)}$ ; | (d) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$ ;       |
| (b) $y' = -\frac{x+y+1}{4x+4y+10}$ ; | (e) $(x+2y)y' = 1, \quad y(0) = -1$ ; |
| (c) $y' = \sin(x+y)$ ;               | (f) $xy' = x+y$ .                     |

**Определение 1.** Уравнение вида  $\dot{x} = f(t, x)$  называется *однородным*<sup>1</sup>, если оно может быть записано в виде  $\dot{x} = g(x/t)$ .

**Замечание 1.** Однородные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью замены  $z = x/t$ .

**Задача 4.** [?] Решите уравнения.

- |                            |                             |
|----------------------------|-----------------------------|
| (a) $xy' = y - xe^{y/x}$ ; | (b) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ . |
|----------------------------|-----------------------------|

**Определение 2.** Траекторией непрерывной вектор-функции  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  называется кривая

$$\{x(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n,$$

с указанным на ней направлением движения при возрастании  $t$ . Можно также сказать, что траектория — это проекция графика функции на пространство значений  $\mathbb{R}^n$ .

**Задача 5.** Нарисовать графики и траектории следующих вектор-функций. Для каждой вектор-функции для каких-нибудь трёх различных значений  $t$  (обозначаемых  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), найти  $\varphi(t_i)$  и на рисунке с траекторией отложить от точки  $\varphi(t_i)$  вектор, равный  $\dot{\varphi}(t_i)$ .

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ , $t \in [0, 2\pi]$ ; | (c) $\varphi(t) = (t \cos t, t \sin t)$ , $t \geq 0$ ;       |
| (b) $\varphi(t) = (\sin t, \cos t)$ , $t \in [0, 2\pi]$ ; | (d) $\varphi(t) = (\sqrt{1-t}, \sqrt{t})$ , $t \in [0, 1]$ . |

## Список литературы

- [1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

<sup>1</sup>Это слово в дифференциальных уравнениях имеет разные смыслы — в будущем мы столкнёмся с линейными однородными уравнениями, которые не имеют ничего общего с теми уравнениями, которые обсуждаются здесь. Извините, это не мы придумали.