

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год**  
**Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s19/g>)**  
**Семинар 2. Уравнения с разделяющимися переменными (24.01)**  
*И. Щуров, М. Матушко*

**Замечание 1.** Существует несколько способов записывать дифференциальные уравнения. На лекциях мы пользовались в основном обозначением  $\dot{x} = f(x, t)$ . В дальнейшем мы будем также часто обозначать независимую переменную через  $x$ , а скомбинацию функцию через  $y$ , и записывать уравнение в виде  $y' = f(x, y)$  или  $dy/dx = f(x, y)$ . Потом мы будем пользоваться и другими способами записи.

**Определение 1.** Геометрическое место точек плоскости  $(x, y)$ , в которых наклон касательных к решениям уравнения  $y' = f(x, y)$  один и тот же, называется *изоклиной*. Уравнение изоклины имеет вид  $f(x, y) = k$ , где  $k$  — постоянная.

**Задача 1.** Начертить несколько разных изоклини для следующих уравнений. Затем начертить эскизы интегральных кривых.

- |                                    |                            |
|------------------------------------|----------------------------|
| (a) $y' = 2x - y$ .                | (d) $yy' + x = 0$ .        |
| (b) $y' = y - x^2$ .               | (e) $xy' = 2y$ .           |
| (c) $y' = \frac{x^2+y^2}{2} - 1$ . | (f) $xy' + y = 0$ .        |
|                                    | (g) $y' = \frac{y}{x+y}$ . |

**Задача 2.** [1], см. также [2] и [3]. Предположим, что скорость прироста популяции пропорциональна не числу особей, а *квадрату* числа особей. Составить и решить соответствующее уравнение, построить поле направлений и интегральные кривые. Что вы можете сказать о вертикальных асимптотах решения? Какую интерпретацию этого явления вы можете привести? Что вы можете сказать об области определения решений?

**Задача 3.** Решая уравнение  $y' = y$  с начальным условием  $y(0) = 1$  методом Эйлера и устремляя шаг к нулю, найти выражение для числа  $e$ .

**Задача 4.** [4] Найти все<sup>1</sup> решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны.

- |   |  |
|---|--|
| (a) $y' = x^2$ .  | (g) $\dot{x} = x^2 + 1$ .  |
| (b) $y' = e^x$ .  | (h) $\dot{x} = x \ln x$ , $x > 0$ .  |
| (c) $y' = e^y$ .  | (i) $\dot{x} = 10^x$ .   |
| (d) $\dot{x} = t^2 + 1$ , $x(1) = 2$ .  | (j) $\dot{x} = 1/(t + 2x)$ ; $x(0) = -1$ . Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых. |
| (e) $\dot{x} = -3x$ , $x(3) = 10$ .   |  |
| (f) $\dot{x} = 2x+t$ , $x(0) = -1/4$ (подсказка: рассмотреть замену $z = 2x+t$ ). Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых. | (k) $\dot{x} = \cos(x - t)$ .  |

**Определение 2.** Дифференциальное уравнение вида

$$y' = \frac{f(y)}{g(x)} \quad (1)$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

<sup>1</sup>Строго говоря, мы ещё не обсуждали теорему, которая бы позволила доказать, что найдены действительно все решения; найдите по крайней мере все решения, которые можно найти с помощью методов, обсуждавшихся на лекции.

**Замечание 2.** Для уравнений с разделяющимися переменными есть явный алгоритм отыскания решений (правда, иногда эти решения могут быть заданы неявной функцией).

Запишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)}$$

Дальше магия (мы обсудим, какой смысл означает это равенство, когда освоимся с дифференциальными формами):

$$\frac{dy}{f(y)} = \frac{dx}{g(x)}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int \frac{dx}{g(x)}$$

После интегрирования получается равенство, связывающее  $y$  и  $x$ , то есть выраждающее неявно функцию  $y(x)$ .

Если была поставлена задача Коши с начальным условием  $y(x_0) = y_0$ , решение можно записать в таком виде:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dz}{f(z)} = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)} \quad (2)$$

**Задача 5.** (\*) Пусть  $F(y) = \int_{y_0}^y \frac{dz}{f(z)}$  и  $y = y(x)$  — некоторая функция.

- (a) Найти  $\frac{d}{dx}F(y(x))$  (выразить результат через  $f(y(x))$  и  $y'(x)$ ).
- (b) Дифференцируя обе части равенства (2) по переменной  $x$ , показать, что функция  $y(x)$ , удовлетворяющая (2), удовлетворяет также (1), то есть является решением исходного уравнения.

**Задача 6.** Найдите все<sup>2</sup> решения уравнения с разделяющимися переменными. Нарисуйте соответствующее поле направлений и его интегральные кривые.

- |                  |                    |                  |                 |
|------------------|--------------------|------------------|-----------------|
| (a) $y' = y/x;$  | (c) $y' = y/(2x);$ | (e) $y' = -x/y;$ | (g) $y' = -xy.$ |
| (b) $y' = 2y/x;$ | (d) $y' = -y/x;$   | (f) $y' = xy;$   |                 |

**Задача 7.** [4] Решите уравнения:

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| (a) $(x^2 + 4)y' = 2xy;$ | (c) $y' \operatorname{ctg}^2(x) + \operatorname{tg}^2(y) = 0;$ |
| (b) $y' = -xe^y;$        | (d) $xy' + y = y^2.$   |

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.
- [2] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millennia*. Science **132** (3436): 1291–1295. doi:10.1126/science.132.3436.1291
- [3] Щуров И. В. На пути к концу света. // N+1, 9.07.2015. <https://nplus1.ru/material/2015/07/09/doomsday>.
- [4] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

<sup>2</sup>см. предыдущую сноску