Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 учебный год
Дифференциальные уравнения
Домашнее задание №2
Илья Щуров, Мария Матушко
Фамилия и имя студента: Лисняк Ярослав Андреевич

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

Задачи

Определение 1. *Дифференциальной 1-формой* называется функция из некоторой области $U \subset V$ линейного пространства V в множество линейных функционалов на V. Иными словами, говорят, что задана дифференциальная 1-форма, если в каждой точке множества U задан некоторый ковектор.

Определение 2. Рассмотрим дифференциальную 1-форму ω на плоскости. Пусть P — некоторая точка плоскости. Отложим от точки P все возможные векторы v, такие что $\omega|_P(v) = 0$. Если $\omega|_P \neq 0$, все такие векторы для фиксированной точки будут лежать на одной прямой. Получится *поле направлений*, задаваемых уравнением $\omega = 0$.

Задача 1. (3 балла за каждый пункт.)

Для каждой из следующих дифференциальных форм построить поле направлений, которые задаются уравнением $\omega = 0$. (Построить прямые, проходящие через точки, указанные на рисунке 1. Отметить точки, в которых направление не задано.)

a. $\omega = 4\,dx + 3\,dy$
b. $\omega = 3x\,dx + 4y\,dy$
c. $\omega = 2y\,dx - 4x\,dy$

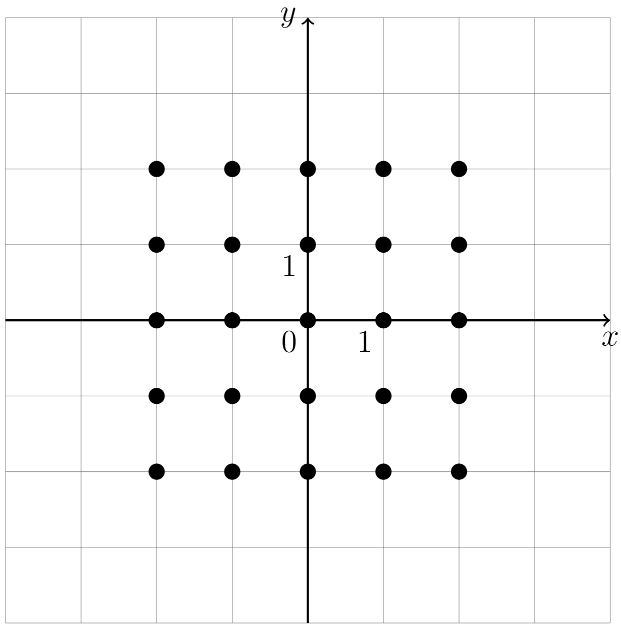

Рис. 1: Рисунок к задачам

d. $\omega = 2y\,dx + 2x\,dy$

Задача 2. (3 балла за каждый пункт.) Для каждого из следующих дифференциальных уравнений построить поле направлений, которое им задаётся. (Построить прямые, проходящие через точки, указанные на рисунке 1.) Как связаны дифференциальные уравнения с дифференциальными формами из предыдущей задачи?

a. $y' = -\dfrac{4}{3}$ b. $y' = -\dfrac{3x}{4y}$ c. $y' = \dfrac{y}{2x}$ d. $y' = -\dfrac{y}{x}$

Задача 3. (5 баллов) Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

- Найти все решения (зависимость $(x(t), y(t))$).
- Найти уравнения фазовых кривых (зависимость x от y и/или y от x).
- Если всё сделано правильно, фазовые кривые этого уравнения должны совпадать с интегральными кривыми для какого-то уравнения из предыдущих задач. Какого?
- Нарисовать векторное поле и фазовые кривые. Выделить фазовую кривую, соответствующую начальному условию $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Задача 4. [1] Простейшая, самая грубая модель, описывающая борьбу двух видов — хищника и жертвы — состоит в следующем. Рассмотрим пруд, в котором живут рыбы двух видов — скажем, караси и щуки. Если бы щук не было, караси размножались бы экспоненциально, со скоростью $\dot{x} = kx$, пропорциональной их количеству x (мы предполагаем, что суммарная масса карасей много меньше массы пруда). Если y — количество щук, то следует учесть карасей, съеденных щуками. Мы предположим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу карасей, так и числу щук: тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение $\dot{x} = kx - axy$.

Что касается щук, то без карасей они вымирают: $\dot{y} = -ly$, в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей: $\dot{y} = -ly + bxy$.

Мы приходим, таким образом к системе дифференциальных уравнений простейшей модели системы хищник-жертва (*модели Лотки—Вольтерра*):

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь a, b, k, l — положительные параметры, фазовым пространством является первая четверть $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Пусть $a = 2$, $b = 3$, $k = 4$ и $l = 3$.

a. (3 балла) Найти все точки фазового пространства, в которых правая часть равна нулю (*особые точки*).
b. (5 баллов) Нарисовать векторное поле (1). Отметить кривые (изоклины), на которых векторы векторного поля направлены горизонтально и вертикально.
c. (3 балла) Найти и нарисовать ещё одну изоклину, являющуюся прямой (не вертикальной и не горизонтальной).
d. (3 балла) Записать неавтономное дифференциальное уравнение, интегральные кривые которого совпадают с фазовыми кривыми системы (1).
e. (10 баллов) Решить полученное уравнение.
f. (5 баллов) Записать уравнение фазовых кривых (зависимость между x и y) в виде $H(x, y) = C$, где $H(x, y) = F(x) + G(y)$. Иными словами, найти такую функцию $z = H(x, y)$, представляющуюся в виде $H(X, y) = F(x) + G(y)$, что для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (1), $H(x(t), y(t)) = const$. (То есть функция H должна оставаться постоянной на фазовых кривых системы.)
g. (3 балла) Найти все точки минимума $H(x, y)$. Если у функции нет конечного числа точек минимума, рассмотреть вместо функции H функцию $-H$.
h. (4 балла) Пусть одна из точек минимума, найденных в предыдущем пункте, имеет координаты (x_0, y_0). Нарисовать графики функций $f(x) = H(x, y_0)$ и $g(y) = H(x_0, y)$.
i. (5 баллов) Нарисовать примерно (или точно с помощью компьютера) несколько фазовых кривых системы (1). (Не забудьте про стрелочки!) Для этого полезно понять, как выглядит график $z = H(x, y)$ (предыдущий пункт вам должен в этом помочь). Явно отметить все фазовые кривые, соответствующие постоянным решениям (положения равновесия, они же особые точки), а также фазовые кривые, для которых одна из координат остаётся постоянной, а другая меняется со временем.
j. (3 балла) Существуют ли периодические решения уравнения (1)?
k. (3 балла) Существуют ли решения, не являющиеся периодическими?
l. (3 балла) Существуют ли неограниченные решения (то есть решения, траекторию которых нельзя поместить ни в какой круг на фазовом пространстве)?

Задача 5. Найдите уравнение фазовых кривых (для систем автономных уравнений) или уравнение интегральных кривых (для неавтономных уравнений). Допускается неявное задание кривых.

a. (6 баллов)
$$\begin{cases} \dot{x} = 3y^2 \sin\left(x^4\right) \cos\left(y^3\right) \\ \dot{y} = -4x^3 \sin\left(y^3\right) \cos\left(x^4\right) \end{cases}$$
b. (6 баллов)
$$dx\left(-5x^4 \sin\left(x^5\right) \sin\left(y^4\right)\right) + dy\left(4y^3 \cos\left(x^5\right) \cos\left(y^4\right)\right) = 0$$

 Фамилия и имя студента: Лисняк Ярослав Андреевич

c. (6 баллов)
$y' = y\left(9x^2 + \cos(x)\right) + \left(-20x^3 + \sin(x)\right) e^{3x^3+\sin(x)}$

d. (6 баллов)
$\begin{cases} \dot{x} = 4x^3 + 6x^2y - 6xy^2 \\ \dot{y} = x^3 + 4x^2y + 6xy^2 - 6y^3 \end{cases}$

e. (6 баллов)
$y' = \dfrac{x^3 - 2x^2y - 2xy^2 - 12y^3}{-2x^3 - 2x^2y - 12xy^2}$

Задача 6. Рассмотрим следующую модель: на плоскости есть несколько точечных массивных тел, положения которых фиксированы («планеты»), а также одно подвижное тело («спутник»). На спутник действуют силы притяжения каждой из планет, определяемые по закону всемирного тяготения:

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная, m и M — массы взаимодействующих тел, r — расстояние между ними.

На любом языке программирования написать программу, находящую координаты спутника в произвольный момент времени по его начальным координатам и скорости и с помощью этой программы выполнить следующие пункты.

a. (10 баллов) Пусть центр Земли находится в начале координат, спутник запускается с поверхности Земли в направлении, перпендикулярном радиусу, с начальной скоростью v_0. Никаких других планет нет. Нарисовать траектории движения спутника (на плоскости) для $v_0 = 5, 9, 12$ км/с за 10000 секунд движения. Считать массу земли сосредоточенной в её центре. Столкновением спутника с поверхностью земли пренебречь.
Подсказка: произведение массы Земли на гравитационную постоянную можно легко найти: оно называется *гравитационным параметром.*

b. (10 баллов) С помощью программы, найти первую космическую скорость (в км/с), то есть такую скорость, при которой спутник выходит на круговую орбиту вокруг Земли. Сравнить с реальным значением первой космической скорости.

c. (10 баллов) Пусть две планеты массой, равной массе Земли, расположены таким образом, что расстояние между их центрами составляет 40000 км. Ровно посередине между ними находится спутник. Начальная скорость спутника направлена под углом в 45 градусов к прямой, соединяющей центры планет. Положение планет фиксированно и не меняется со временем. Взять все начальные скорости от 1 до 5 км/с с шагом в 0.5 км/с и для каждой построить траекторию за первые 20000 секунд движения.

Задача 7. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = x^2 + x - 6.$$

a. (3 балла) Найти функцию потенциальной энергии, построить её график.

b. (3 балла) Найти функцию полной энергии (первый интеграл).

c. (5 баллов) Под графиком функции потенциальной энергии построить фазовый портрет уравнения. Отметить особые точки.

d. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения является периодическим. Отметить их на фазовом портрете.

e. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения имеет конечный предел при $t \to +\infty$. Отметить их на фазовом портрете.

 Фамилия и имя студента: Лисняк Ярослав Андреевич

f. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение является ограниченным (остаётся внутри некоторого круга) при всех t. Все ли такие решения являются периодическими?

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.