

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 учебный год

Дифференциальные уравнения

Домашнее задание №2

Илья Щуров, Мария Матушко

Фамилия и имя студента: Кащеев Владислав Владимирович

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение  $x = x(t)$  дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо сверстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

**Grading policy.** Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

## Задачи

**Определение 1.** Дифференциальной 1-формой называется функция из некоторой области  $U \subset V$  линейного пространства  $V$  в множество линейных функционалов на  $V$ . Иными словами, говорят, что задана дифференциальная 1-форма, если в каждой точке множества  $U$  задан некоторый ковектор.

**Определение 2.** Рассмотрим дифференциальную 1-форму  $\omega$  на плоскости. Пусть  $P$  — некоторая точка плоскости. Отложим от точки  $P$  все возможные векторы  $v$ , такие что  $\omega|_P(v) = 0$ . Если  $\omega|_P \neq 0$ , все такие векторы для фиксированной точки будут лежать на одной прямой. Получится поле направлений, задаваемых уравнением  $\omega = 0$ .

**Задача 1.** (3 балла за каждый пункт.)

Для каждой из следующих дифференциальных форм построить поле направлений, которые задаются уравнением  $\omega = 0$ . (Построить прямые, проходящие через точки, указанные на рисунке 1. Отметить точки, в которых направление не задано.)

a.  $\omega = 4 dx + 5 dy$

b.  $\omega = 2x dx + 2y dy$

c.  $\omega = 2y dx - 2x dy$

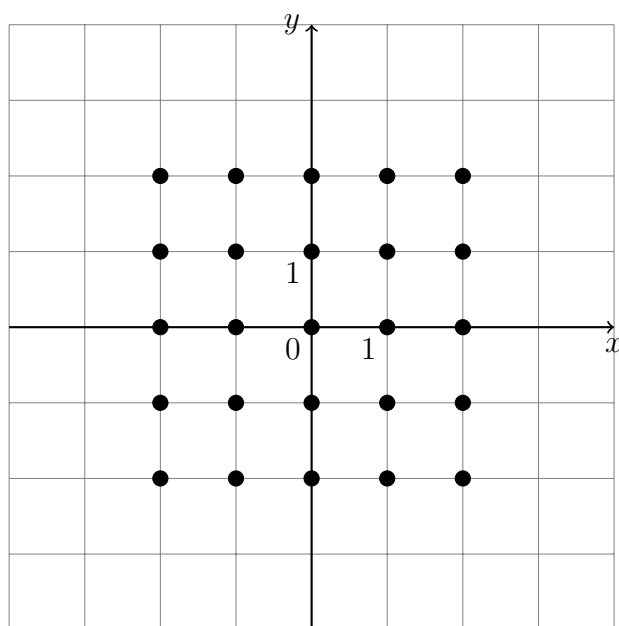


Рис. 1: Рисунок к задачам

d.  $\omega = 3y dx + 4x dy$

**Задача 2.** (3 балла за каждый пункт.) Для каждого из следующих дифференциальных уравнений построить поле направлений, которое им задаётся. (Построить прямые, проходящие через точки, указанные на рисунке 1.) Как связаны дифференциальные уравнения с дифференциальными формами из предыдущей задачи?

a.  $y' = -\frac{4}{5}$

b.  $y' = -\frac{x}{y}$

c.  $y' = \frac{y}{x}$

d.  $y' = -\frac{3y}{4x}$

**Задача 3.** (5 баллов) Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

- Найти все решения (зависимость  $(x(t), y(t))$ ).
- Найти уравнения фазовых кривых (зависимость  $x$  от  $y$  и/или  $y$  от  $x$ ).
- Если всё сделано правильно, фазовые кривые этого уравнения должны совпадать с интегральными кривыми для какого-то уравнения из предыдущих задач. Какого?
- Нарисовать векторное поле и фазовые кривые. Выделить фазовую кривую, соответствующую начальному условию  $x(0) = 0, y(0) = -1$ .

**Задача 4.** [1] Простейшая, самая грубая модель, описывающая борьбу двух видов — хищника и жертвы — состоит в следующем. Рассмотрим пруд, в котором живут рыбы двух видов — скажем, караси и щуки. Если бы щук не было, караси размножались бы экспоненциально, со скоростью  $\dot{x} = kx$ , пропорциональной их количеству  $x$  (мы предполагаем, что суммарная масса карасей много меньше массы пруда). Если  $y$  — количество щук, то следует учесть карасей, съеденных щуками. Мы предположим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу карасей, так и числу щук: тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение  $\dot{x} = kx - axy$ .

Что касается щук, то без карасей они вымирают:  $\dot{y} = -ly$ , в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей:  $\dot{y} = -ly + bxy$ .

Мы приходим, таким образом к системе дифференциальных уравнений простейшей модели системы хищник-жертва (*модели Лотки–Вольтерра*):

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $a, b, k, l$  – положительные параметры, фазовым пространством является первая четверть  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Пусть  $a = 3, b = 3, k = 4$  и  $l = 4$ .

- (3 балла) Найти все точки фазового пространства, в которых правая часть равна нулю (*особые точки*).
- (5 баллов) Нарисовать векторное поле (1). Отметить кривые (изоклины), на которых векторы векторного поля направлены горизонтально и вертикально.
- (3 балла) Найти и нарисовать ещё одну изоклину, являющуюся прямой (не вертикальной и не горизонтальной).
- (3 балла) Записать неавтономное дифференциальное уравнение, интегральные кривые которого совпадают с фазовыми кривыми системы (1).
- (10 баллов) Решить полученное уравнение.
- (5 баллов) Записать уравнение фазовых кривых (зависимость между  $x$  и  $y$ ) в виде  $H(x, y) = C$ , где  $H(x, y) = F(x) + G(y)$ . Иными словами, найти такую функцию  $z = H(x, y)$ , представляющуюся в виде  $H(X, y) = F(x) + G(y)$ , что для любого решения  $(x(t), y(t))$  системы (1),  $H(x(t), y(t)) = \text{const}$ . (То есть функция  $H$  должна оставаться постоянной на фазовых кривых системы.)
- (3 балла) Найти все точки минимума  $H(x, y)$ . Если у функции нет конечного числа точек минимума, рассмотреть вместо функции  $H$  функцию  $-H$ .
- (4 балла) Пусть одна из точек минимума, найденных в предыдущем пункте, имеет координаты  $(x_0, y_0)$ . Нарисовать графики функций  $f(x) = H(x, y_0)$  и  $g(y) = H(x_0, y)$ .
- (5 баллов) Нарисовать примерно (или точно с помощью компьютера) несколько фазовых кривых системы (1). (Не забудьте про стрелочки!) Для этого полезно понять, как выглядит график  $z = H(x, y)$  (предыдущий пункт вам должен в этом помочь). Явно отметить все фазовые кривые, соответствующие постоянным решениям (положения равновесия, они же особые точки), а также фазовые кривые, для которых одна из координат остаётся постоянной, а другая меняется со временем.
- (3 балла) Существуют ли периодические решения уравнения (1)?
- (3 балла) Существуют ли решения, не являющиеся периодическими?
- (3 балла) Существуют ли неограниченные решения (то есть решения, траекторию которых нельзя поместить ни в какой круг на фазовом пространстве)?

**Задача 5.** Найдите уравнение фазовых кривых (для систем автономных уравнений) или уравнение интегральных кривых (для неавтономных уравнений). Допускается неявное задание кривых.

- (6 баллов)
 
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^3 + 6x^2y - 6xy^2 \\ \dot{y} = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - 6y^3 \end{cases}$$
- (6 баллов)
 
$$y' = y(16x^3 + \cos(x)) + (-16x^3 + \sin(x))e^{4x^4 + \sin(x)}$$

c. (6 баллов)

$$dx (-5x^4 y^3 \sin(x^5 + y^2)) + dy (y^2 (-2y^2 \sin(x^5 + y^2) + 3 \cos(x^5 + y^2))) = 0$$

d. (6 баллов)

$$\begin{cases} \dot{x} = -5y^4 \sin(y^5) \cos(x^4) \\ \dot{y} = 4x^3 \sin(x^4) \cos(y^5) \end{cases}$$

e. (6 баллов)

$$y' = \frac{x^3 + 2x^2y - 8xy^2 + 3y^3}{2x^3 - 8x^2y + 3xy^2}$$

**Задача 6.** Рассмотрим следующую модель: на плоскости есть несколько точечных массивных тел, положения которых фиксированы («планеты»), а также одно подвижное тело («спутник»). На спутник действуют силы притяжения каждой из планет, определяемые по закону всемирного тяготения:

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $m$  и  $M$  — массы взаимодействующих тел,  $r$  — расстояние между ними.

На любом языке программирования написать программу, находящую координаты спутника в произвольный момент времени по его начальным координатам и скорости и с помощью этой программы выполнить следующие пункты.

- (10 баллов) Пусть центр Земли находится в начале координат, спутник запускается с поверхности Земли в направлении, перпендикулярном радиусу, с начальной скоростью  $v_0$ . Никаких других планет нет. Нарисовать траектории движения спутника (на плоскости) для  $v_0 = 5, 9, 12$  км/с за 10000 секунд движения. Считать массу земли сосредоточенной в её центре. Столкновением спутника с поверхностью земли пренебречь.  
Подсказка: произведение массы Земли на гравитационную постоянную можно легко найти: оно называется *гравитационным параметром*.
- (10 баллов) С помощью программы, найти первую космическую скорость (в км/с), то есть такую скорость, при которой спутник выходит на круговую орбиту вокруг Земли. Сравнить с реальным значением первой космической скорости.
- (10 баллов) Пусть две планеты массой, равной массе Земли, расположены таким образом, что расстояние между их центрами составляет 40000 км. Ровно посередине между ними находится спутник. Начальная скорость спутника направлена под углом в 45 градусов к прямой, соединяющей центры планет. Положение планет фиксированно и не меняется со временем. Взять все начальные скорости от 1 до 5 км/с с шагом в 0.5 км/с и для каждой построить траекторию за первые 20000 секунд движения.

**Задача 7.** Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = x^2 + 9x + 20.$$

- (3 балла) Найти функцию потенциальной энергии, построить её график.
- (3 балла) Найти функцию полной энергии (первый интеграл).
- (5 баллов) Под графиком функции потенциальной энергии построить фазовый портрет уравнения. Отметить особые точки.
- (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения является периодическим. Отметить их на фазовом портрете.
- (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение уравнения имеет конечный предел при  $t \rightarrow +\infty$ . Отметить их на фазовом портрете.

- f. (3 балла) Найти все начальные условия, при которых решение является ограниченным (остаётся внутри некоторого круга) при всех  $t$ . Все ли такие решения являются периодическими?

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.