Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 учебный год
Дифференциальные уравнения
Домашнее задание №1
Илья Щуров, Мария Матушко
Фамилия и имя студента: Телешева Элина Дмитриевна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

Задачи

Замечание 1. В задачах 1–5 можно нарисовать соответствующие картинки вручную (аккуратно) на бумажке и вставить скан, либо использовать любой подходящий компьютерный инструмент. Помните: на контрольной и экзамене у вас не будет возможности пользоваться компьютерными инструментами.

Напоминаем, что в качестве решений дифференциальных уравнений мы рассматриваем только функции, определённые на связном подмножестве прямой (таком подмножестве, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит отрезок между этими точками). Если в какой-то точке правая часть дифференциального уравнения не определена, то решение не может проходить через эту точку.

Задача 1. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = \frac{3}{2}\frac{t}{x}$.

a. Построить поле направлений.
b. Найти общий вид решений.
c. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$,
- $x(0) = -1$

Задача 2. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = -3\dfrac{t}{x}$.

a. Построить поле направлений.
b. Найти общий вид решений.
c. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$,
- $x(0) = -1$

Задача 3. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = 3\dfrac{x}{t}$.

a. Построить поле направлений.
b. Найти общий вид решений.
c. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(1) = 1$,
- $x(1) = -1$,
- $x(-1) = 1$,
- $x(-1) = -1$,
- $x(1) = 0$,
- $x(-1) = 0$

Задача 4. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = -2\dfrac{x}{t}$.

a. Построить поле направлений.
b. Найти общий вид решений.
c. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(1) = 1$,
- $x(1) = -1$,
- $x(-1) = 1$,
- $x(-1) = -1$,
- $x(1) = 0$,
- $x(-1) = 0$

Задача 5. (40 баллов) Рассмотрим уравнение.

$$\dot{x} = (15t - 3x - 5)^2 + 4 \tag{1}$$

a. (5 баллов) Подобрав подходящую замену, свести уравнение к автономному.
b. (10 баллов) Нарисовать поле направлений и эскизы интегральных кривых для исходного уравнения и уравнения после замены. Как они связаны между собой?
c. (15 баллов) Найти все решения исходного уравнения (в виде $x = x(t)$).
Внимание! В ходе преобразований необходимо аккуратно учитывать знаки выражений, стоящих под логарифмами. В зависимости от выбора знаков будут получаться различные семейства кривых.
d. (5 баллов) Найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(-1) = -7$, и нарисовать соответствующую интегральную кривую.

e. (10 баллов) Найти область определения решения в зависимости от начального условия. Исследовать предельное поведение решений при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ (если решения определены для соответствующих значений t). Существуют ли решения, уходящие на бесконечность за конечное время?
f. (5 баллов) Что вы можете сказать про горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты решений?

Задача 6. (20 баллов) Написать на любом языке программирования программу, решающую дифференциальное уравнение с одномерными фазовым пространством с помощью метода Эйлера.

a. Построить график истиного решения и эйлеровских приближений для дифференциального уравнения $\dot{x} = 2x^2 + 2$ и начального условия $x(0) = 1$ на отрезке $[0, 1/2]$. (Выберите разумный масштаб вертикальной оси.) Эйлеровские приближеня вычислить, разбивая отрезок интегрирования на 10, 30, 50, 100, 300, 500, 1000 частей.
b. Сколько шагов нужно выбрать, чтобы в точке $t = 0{,}25$ ошибка приближения не превышала 10^{-2}. А в точке $t = 0{,}3$? А в точке $t = 0{,}35$? А в точке $t = 0{,}4$?