

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 учебный год

Дифференциальные уравнения

Домашнее задание №1

Илья Щуров, Мария Матушко

Фамилия и имя студента: Ступин Максим Александрович

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо сверстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Grading policy. Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями.

Задачи

Замечание 1. В задачах 1–5 можно нарисовать соответствующие картинки вручную (аккуратно) на бумажке и вставить скан, либо использовать любой подходящий компьютерный инструмент. Помните: на контрольной и экзамене у вас не будет возможности пользоваться компьютерными инструментами.

Напоминаем, что в качестве решений дифференциальных уравнений мы рассматриваем только функции, определённые на связном подмножестве прямой (таком подмножестве, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит отрезок между этими точками). Если в какой-то точке правая часть дифференциального уравнения не определена, то решение не может проходить через эту точку.

Задача 1. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = -\frac{4t}{5x}$.

- Построить поле направлений.
- Найти общий вид решений.
- Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$,
- $x(0) = -1$

Задача 2. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = \frac{2t}{3x}$.

- a. Построить поле направлений.
- b. Найти общий вид решений.
- c. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- $x(0) = 2$,
- $x(0) = -1$

Задача 3. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = -\frac{2x}{3t}$.

- a. Построить поле направлений.
- b. Найти общий вид решений.
- c. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- | | | |
|-----------------|------------------|----------------|
| • $x(1) = 1$, | • $x(-1) = 1$, | • $x(1) = 0$, |
| • $x(1) = -1$, | • $x(-1) = -1$, | • $x(-1) = 0$ |

Задача 4. (10 баллов) Рассмотрим уравнение: $\dot{x} = \frac{5x}{3t}$.

- a. Построить поле направлений.
- b. Найти общий вид решений.
- c. Выразить явно решения со следующими начальными условиями. Указать область определения каждого решения. На картинке с полем направлений построить соответствующие интегральные кривые.

- | | | |
|-----------------|------------------|----------------|
| • $x(1) = 1$, | • $x(-1) = 1$, | • $x(1) = 0$, |
| • $x(1) = -1$, | • $x(-1) = -1$, | • $x(-1) = 0$ |

Задача 5. (40 баллов) Рассмотрим уравнение.

$$\dot{x} = (8t - 4x + 4)^2 + 1 \tag{1}$$

- a. (5 баллов) Подобрать подходящую замену, свести уравнение к автономному.
- b. (10 баллов) Нарисовать поле направлений и эскизы интегральных кривых для исходного уравнения и уравнения после замены. Как они связаны между собой?
- c. (15 баллов) Найти все решения исходного уравнения (в виде $x = x(t)$).
Внимание! В ходе преобразований необходимо аккуратно учитывать знаки выражений, стоящих под логарифмами. В зависимости от выбора знаков будут получаться различные семейства кривых.
- d. (5 баллов) Найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(2) = 5$, и нарисовать соответствующую интегральную кривую.

- e. (10 баллов) Найти область определения решения в зависимости от начального условия. Исследовать предельное поведение решений при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ (если решения определены для соответствующих значений t). Существуют ли решения, уходящие на бесконечность за конечное время?
- f. (5 баллов) Что вы можете сказать про горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты решений?

Задача 6. (20 баллов) Написать на любом языке программирования программу, решающую дифференциальное уравнение с одномерными фазовым пространством с помощью метода Эйлера.

- a. Построить график истинного решения и эйлеровских приближений для дифференциального уравнения $\dot{x} = 2x^2 + 2$ и начального условия $x(0) = 1$ на отрезке $[0, 1/2]$. (Выберите разумный масштаб вертикальной оси.) Эйлеровские приближения вычислить, разбивая отрезок интегрирования на 10, 30, 50, 100, 300, 500, 1000 частей.
- b. Сколько шагов нужно выбрать, чтобы в точке $t = 0,25$ ошибка приближения не превышала 10^{-2} . А в точке $t = 0,3$? А в точке $t = 0,35$? А в точке $t = 0,4$?