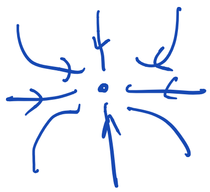
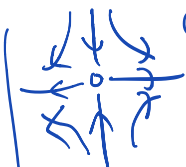
http://math-info.hse.ru/s19/g

# Линейные и нелинейные о.т. на плоскости

Напоминание: классиф. линейных о.т. на пл-ти

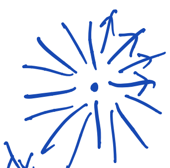


седло

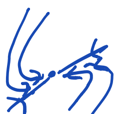


$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

узел



вырожд.



$\dot{x} = \lambda x$
$\dot{y} = \lambda y$ дикрит.

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

фокус

$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$

$\mathrm{Re}\,\lambda_1 \neq 0$

центр

$\mathrm{Re}\,\lambda_1 = 0$

$\mathrm{Im}\,\lambda_1 \neq 0$

Нелинейные о.т.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{aligned}\right\}$$

Пусть $(x^*, y^*)$ — о.т., т.е.

$$f(x^*, y^*) = 0$$
$$g(x^*, y^*) = 0.$$

Сделаем замену:

$$x_{new} = x - x^*$$
$$y_{new} = y - y^*$$

Далее $x, y$ — новая система к-т. теперь $(0,0)$ — о.т.

$$z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad F(z) = (f(x,y), g(x,y)) \qquad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ гладкое}$$

$$F(0) = (0, 0)$$

$$\dot{z} = F(z)$$

Разложим $F$ в ряд Тейлора в т. $0$.

$$F(z) = \underbrace{F(0)}_{0} + \underbrace{\frac{\partial F(0)}{\partial z}}_{=A} \cdot z + \bar{o}(\|z\|^2)$$

$\frac{\partial F}{\partial z}$ — лин. оп. $\sim$ матр. Якоби $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$

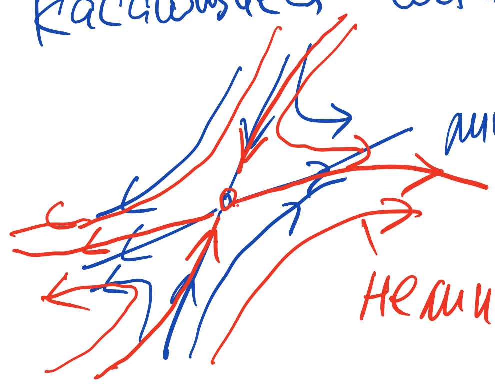
(1) $\dot{z} = Az + o(\|z\|^2)$ Будем рассм. сл. $A$ невырожд.

Неформально: если $A$ ~ седлу, фокусу или узлу, ф. портрет (1) "похож" на ф. портрет сист. $\underbrace{\dot{z} = Az}_{\text{линеариз. (1) в о.т. (0,0)}}$ (2)

Формализации:

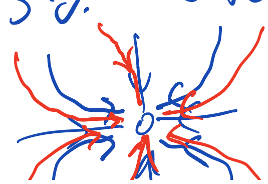
Для сёдел: теорема Андронова-Хопфа

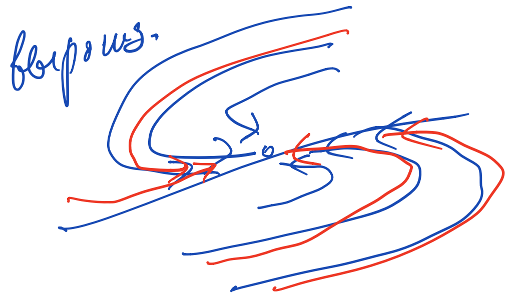
У нелин. седла есть четыре тр-ии (сепаратр.), стремящ. к о.т. в прямом или обр. времени, касающиеся соотв. собств. напр. $A$

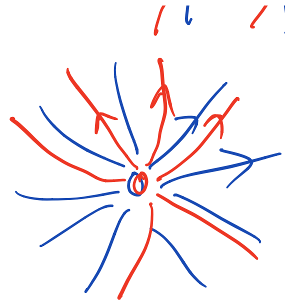



Для узлов:

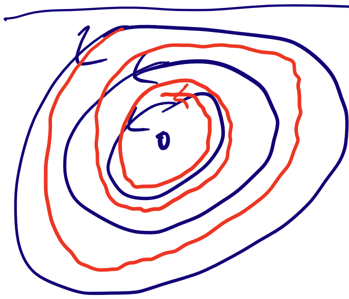
сохраняется утв, что все тр-ии $\to$ о.т. при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$ вдоль каких-то напр., зад. собств. в-ми $A$.





Для фокусов: сохр. утв-е о том, что ф. кривые стремятся к О.т. при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$, совершая $\infty$ число оборотов вокруг О.т.



центр $\longrightarrow$ слабый фокус

В полярных центр имеет такую запись:

$$\dot{\varphi} = 1$$
$$\dot{r} = 0 \longrightarrow \dot{r} = -r^{10}$$

# Линейные о.м. в многомерных пр-вах.

$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \quad (3)$$

$A$ – пост. лин. отобр $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Если $A$ – диагонализир., то сист. (3) имеет простое решение: в диагон. базисе

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \lambda_1 \tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \lambda_2 \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n = \lambda_n \tilde{x}_n \end{cases}$$

---

Всегда: реш. сист. (3) явл.

$$x(t) = e^{At} x^0$$

$$\boxed{e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N$$

$B$ – матрица $\quad B^0 = E$

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$$

почему сходится?

Набросок д-ва:

Определим норму матр: $\|B\| = \sup\limits_{\|u\|=1} \|Bu\|$

Заметим, что

$\forall B_1, B_2$:

$$\|B_1 \cdot B_2\| \leq \|B_1\| \cdot \|B_2\|$$

$$\|B_1 + B_2\| \leq \|B_1\| + \|B_2\|$$

$$\|e^B\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|B^k\|}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|B\|^k}{k!} = e^{\|B\|}$$

$$\left(e^{At}\right)^{\cdot} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}\right)^{\cdot} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}\right)^{\cdot} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(A^k t^k\right)^{\cdot}}{k!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k (k t^{k-1})}{k!} =$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{At}$$

---

Как находить экспоненту матр?

Рассм случай жорд. клетки

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + N$$

нильпотентная матрица, т.е $N^n = 0$.

Хочется написать

$$e^{J_\lambda} = e^{\lambda E + N} \overset{?}{=}$$

верно т.к. $\lambda E$ со всем коммут.

$$= e^{\lambda E} \cdot e^N$$

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^\lambda \end{pmatrix}$$

$$e^{A+B} \cancel{=} e^A \cdot e^B$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

в д-ве исп. коммут. умн.

$$e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{N^k}{k!}$$

$$e^{J_\lambda} = e^{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{N^k}{k!}$$

---

Общий случай. $A \sim \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{\lambda_m} \end{pmatrix}$

$W < V$

$A : V \to V$

$W$ наз. инв., если $\forall w \in W : Aw \in W$

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{J_{\lambda_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{J_{\lambda_2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{J_{\lambda_m}} \end{pmatrix}$$