

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год**Линейная алгебра****ДЗ №9: приведение квадратичной формы к главным осям ()***М. Матушко, И. Машанова, И. Щуров, И. Эрлих***Задача 1.** Рассмотрим билинейную форму

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = x_1(5y_1 + 8y_2 - 10y_3) + x_2(8y_1 + 11y_2 + 2y_3) + 2x_3(-5y_1 + y_2 + y_3),$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Докажите, что эта форма действительно является билинейной.
- (b) Докажите, что эта форма является симметричной, то есть $B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x})$.
- (c) Для всех пар базисных векторов e_i, e_j найдите значение формы $B(e_i, e_j)$.
- (d) Составьте матрицу билинейной формы B .
- (e) Выпишите квадратичную форму, соответствующую билинейной форме B .
- (f) Пусть A — оператор, записывающийся в стандартном базисе той же матрицей, что и билинейная форма B . Найдите все собственные векторы и все собственные значения оператора A .
- (g) Проверьте, что собственные векторы оператора A взаимно ортогональны.
- (h) Нормируйте базис из собственных векторов оператора A , то есть замените каждый вектор на коллинеарный ему вектор длины 1.
- (i) Составьте матрицы переходов от стандартного базиса к базису, найденному в предыдущем пункте, и обратно.
- (j) Запишите оператор A в базисе, найденном в 1h, то есть представьте матрицу A в виде $A = C^{-1}DC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
- (k) Запишите билинейную форму в базисе, найденном в 1h, то есть представьте матрицу A в виде $A = C^TDC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
- (l) Является ли соответствующая квадратичная форма положительно определенной, отрицательно определенной, положительно полупорядоченной, отрицательно полупорядоченной?

Задача 2. Рассмотрим билинейную форму,

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = x_1(-7y_1 + 4y_2 + 4y_3) + x_2(4y_1 - y_2 + 8y_3) + x_3(4y_1 + 8y_2 - y_3),$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Докажите, что эта форма действительно является билинейной.
- (b) Докажите, что эта форма является симметричной, то есть $B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x})$.
- (c) Для всех пар базисных векторов e_i, e_j найдите значение формы $B(e_i, e_j)$.
- (d) Составьте матрицу билинейной формы B .
- (e) Выпишите квадратичную форму, соответствующую билинейной форме B .

- (f) Пусть A — оператор, записывающийся в стандартном базисе той же матрицей, что и билинейная форма B . Найдите все собственные векторы и все собственные значения оператора A .
- (g) Найдите базис, состоящий из собственных векторов оператора A . Однозначно ли решается эта задача? Почему?
- (h) Нормируйте базис из собственных векторов оператора A , то есть замените каждый вектор на коллинеарный ему вектор длины 1.
- (i) Составьте матрицы переходов от стандартного базиса к построенному в предыдущем пункте и обратно.
- (j) Получился ли базис ортонормированным? Как будет меняться матрица оператора при переходе к этому базису? А матрица билинейной формы?
- (k) При помощи процесса ортогонализации постройте из базиса, найденного в 2h ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов рассматриваемого оператора.
- (l) Запишите оператор A в базисе, построенном в предыдущем пункте, то есть представьте матрицу A в виде $A = C^{-1}DC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
- (m) Запишите билинейную форму в базисе, найденном в 2k, то есть представьте матрицу A в виде $A = C^TDC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
- (n) Является ли соответствующая квадратичная форма положительно определенной, отрицательно определенной, положительно полупорядоченной, отрицательно полупорядоченной?

Задача 3. Нарисуйте на плоскости множество точек $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, для которых $f(\vec{x}) = 1$, если квадратичная форма $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задаётся формулой

- (a) $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$;
(b) $f(\vec{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2$;
(c) $f(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2$.

Задача 4. Приведите квадратичную форму (a) $f(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2$; (b) $f(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$ к главным осям. Нарисуйте на плоскости (в старых координатах) множество точек $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, для которых $f(\vec{x}) = 1$. На том же рисунке изобразите новые координатные оси.

Задача 5. Рассмотрим функцию $F(t, x, y, z) = 4t^2 + 2tx + 2x^2 + 4xy + 6y^2 + 6yz + 4z^2$. Является ли точка $(0, 0, 0, 0)$ для функции F точкой максимума, минимума, или ни тем, ни другим?

Задача 6. Рассмотрим квадратичную форму Q , заданную в стандартном базисе матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим трёхмерное подпространство W , являющееся ортогональным дополнением к подпространству, натянутому на вектор $u = (2, -1, -4, 2)$. Задайте в W какой-нибудь базис и найдите матрицу ограничения формы Q на это подпространство. Является ли это ограничение положительно определенной формой, отрицательно определенной или знаконеопределенной?

Задача 7. Пусть на \mathbb{R}^2 действует линейный оператор \mathcal{A} , заданный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим единичную окружность, заданную уравнением $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (иными словами, для стандартного скалярного произведения она задётся уравнением $(u, u) = 1$, где $u = (x_1, x_2)$; здесь и далее мы будем отождествлять точки и их радиус-векторы).

- Найдите уравнение образа единичной окружности под действием оператора \mathcal{A} .
- Пусть u — вектор, принадлежащий единичной окружности, $v = Au$. Докажите, что вектор v удовлетворяет уравнению $((AA^T)^{-1}v, v) = 1$. Запишите это уравнение в координатах и сравните с результатом предыдущего пункта.
- Найти ортонормированный диагонализующий базис для формы, заданной матрицей AA^T .
- Как выглядит матрица формы, заданной в стандартном базисе матрицей $(AA^T)^{-1}$, в новом базисе из предыдущего пункта?
- Нарисуйте, как выглядит образ единичной окружности под действием оператора \mathcal{A} в новых координатах.
- Нарисуйте, как выглядит образ единичной окружности под действием оператора \mathcal{A} в исходных координатах.
- Найдите вектор u , принадлежащий единичной окружности, для которого $\|Au\|^2$ достигает своего максимального значения. Нарисуйте этот вектор на картинке из предыдущего пункта. (Докажите, что это действительно максимум. Это проще делать в нормализующих координатах.)
- Найдите вектор u , принадлежащий единичной окружности, для которого $\|Au\|^2$ достигает своего минимального значения. Нарисуйте этот вектор на картинке из предыдущего пункта.