

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год****Линейная алгебра****ДЗ №9: приведение квадратичной формы к главным осям ()***М. Матушко, И. Машанова, И. Щуров, И. Эрлих***Задача 1.** Рассмотрим билинейную форму

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = x_1(11y_1 + 8y_2 + 2y_3) + x_2(8y_1 + 5y_2 - 10y_3) + 2x_3(y_1 - 5y_2 + y_3),$$

где  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  и  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ .

- (a) Докажите, что эта форма действительно является билинейной.
- (b) Докажите, что эта форма является симметричной, то есть  $B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x})$ .
- (c) Для всех пар базисных векторов  $e_i, e_j$  найдите значение формы  $B(e_i, e_j)$ .
- (d) Составьте матрицу билинейной формы  $B$ .
- (e) Выпишите квадратичную форму, соответствующую билинейной форме  $B$ .
- (f) Пусть  $A$  — оператор, записывающийся в стандартном базисе той же матрицей, что и билинейная форма  $B$ . Найдите все собственные векторы и все собственные значения оператора  $A$ .
- (g) Проверьте, что собственные векторы оператора  $A$  взаимно ортогональны.
- (h) Нормируйте базис из собственных векторов оператора  $A$ , то есть замените каждый вектор на коллинеарный ему вектор длины 1.
- (i) Составьте матрицы переходов от стандартного базиса к базису, найденному в предыдущем пункте, и обратно.
- (j) Запишите оператор  $A$  в базисе, найденном в 1h, то есть представьте матрицу  $A$  в виде  $A = C^{-1}DC$ , где  $C$  — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
- (k) Запишите билинейную форму в базисе, найденном в 1h, то есть представьте матрицу  $A$  в виде  $A = C^TDC$ , где  $C$  — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
- (l) Является ли соответствующая квадратичная форма положительно определенной, отрицательно определенной, положительно полупорядоченной, отрицательно полупорядоченной?

**Задача 2.** Рассмотрим билинейную форму,

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = -x_1(7y_1 + 4y_2 - 4y_3) - x_2(4y_1 + y_2 + 8y_3) - x_3(-4y_1 + 8y_2 + y_3),$$

где  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  и  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ .

- (a) Докажите, что эта форма действительно является билинейной.
- (b) Докажите, что эта форма является симметричной, то есть  $B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x})$ .
- (c) Для всех пар базисных векторов  $e_i, e_j$  найдите значение формы  $B(e_i, e_j)$ .
- (d) Составьте матрицу билинейной формы  $B$ .
- (e) Выпишите квадратичную форму, соответствующую билинейной форме  $B$ .

- (f) Пусть  $A$  — оператор, записывающийся в стандартном базисе той же матрицей, что и билинейная форма  $B$ . Найдите все собственные векторы и все собственные значения оператора  $A$ .
- (g) Найдите базис, состоящий из собственных векторов оператора  $A$ . Однозначно ли решается эта задача? Почему?
- (h) Нормируйте базис из собственных векторов оператора  $A$ , то есть замените каждый вектор на коллинеарный ему вектор длины 1.
- (i) Составьте матрицы переходов от стандартного базиса к построенному в предыдущем пункте и обратно.
- (j) Получился ли базис ортонормированным? Как будет меняться матрица оператора при переходе к этому базису? А матрица билинейной формы?
- (k) При помощи процесса ортогонализации постройте из базиса, найденного в 2h ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов рассматриваемого оператора.
- (l) Запишите оператор  $A$  в базисе, построенном в предыдущем пункте, то есть представьте матрицу  $A$  в виде  $A = C^{-1}DC$ , где  $C$  — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
- (m) Запишите билинейную форму в базисе, найденном в 2k, то есть представьте матрицу  $A$  в виде  $A = C^TDC$ , где  $C$  — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
- (n) Является ли соответствующая квадратичная форма положительно определенной, отрицательно определенной, положительно полупорядоченной, отрицательно полупорядоченной?

**Задача 3.** Нарисуйте на плоскости множество точек  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ , для которых  $f(\vec{x}) = 1$ , если квадратичная форма  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  задаётся формулой

- (a)  $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$ ;  
(b)  $f(\vec{x}) = 7x_1^2 + 5x_2^2$ ;  
(c)  $f(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2$ .

**Задача 4.** Приведите квадратичную форму (a)  $f(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2$ ; (b)  $f(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$  к главным осям. Нарисуйте на плоскости (в старых координатах) множество точек  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ , для которых  $f(\vec{x}) = 1$ . На том же рисунке изобразите новые координатные оси.

**Задача 5.** Рассмотрим функцию  $F(t, x, y, z) = -3t^2 - 2tx - 3x^2 - 8xy - 8y^2 - 8yz - 12z^2$ . Является ли точка  $(0, 0, 0, 0)$  для функции  $F$  точкой максимума, минимума, или ни тем, ни другим?

**Задача 6.** Рассмотрим квадратичную форму  $Q$ , заданную в стандартном базисе матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим трёхмерное подпространство  $W$ , являющееся ортогональным дополнением к подпространству, натянутому на вектор  $u = (3, -2, -3, 0)$ . Задайте в  $W$  какой-нибудь базис и найдите матрицу ограничения формы  $Q$  на это подпространство. Является ли это ограничение положительно определенной формой, отрицательно определенной или знаконеопределенной?

**Задача 7.** Пусть на  $\mathbb{R}^2$  действует линейный оператор  $\mathcal{A}$ , заданный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим единичную окружность, заданную уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  (иными словами, для стандартного скалярного произведения она задётся уравнением  $(u, u) = 1$ , где  $u = (x_1, x_2)$ ; здесь и далее мы будем отождествлять точки и их радиус-векторы).

- Найдите уравнение образа единичной окружности под действием оператора  $\mathcal{A}$ .
- Пусть  $u$  — вектор, принадлежащий единичной окружности,  $v = Au$ . Докажите, что вектор  $v$  удовлетворяет уравнению  $((AA^T)^{-1}v, v) = 1$ . Запишите это уравнение в координатах и сравните с результатом предыдущего пункта.
- Найти ортонормированный диагонализующий базис для формы, заданной матрицей  $AA^T$ .
- Как выглядит матрица формы, заданной в стандартном базисе матрицей  $(AA^T)^{-1}$ , в новом базисе из предыдущего пункта?
- Нарисуйте, как выглядит образ единичной окружности под действием оператора  $\mathcal{A}$  в новых координатах.
- Нарисуйте, как выглядит образ единичной окружности под действием оператора  $\mathcal{A}$  в исходных координатах.
- Найдите вектор  $u$ , принадлежащий единичной окружности, для которого  $\|Au\|^2$  достигает своего максимального значения. Нарисуйте этот вектор на картинке из предыдущего пункта. (Докажите, что это действительно максимум. Это проще делать в нормализующих координатах.)
- Найдите вектор  $u$ , принадлежащий единичной окружности, для которого  $\|Au\|^2$  достигает своего минимального значения. Нарисуйте этот вектор на картинке из предыдущего пункта.