Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Линейная алгебра
ДЗ №9: приведение квадратичной формы к главным осям ()

М. Матушко, И. Машанова, И. Щуров, И. Эрлих

Задача 1. Рассмотрим билинейную форму

$$B(\vec{x},\vec{y}) = -2x_1\left(-y_1+y_2+5y_3\right) - x_2\left(2y_1-11y_2+8y_3\right) - x_3\left(10y_1+8y_2-5y_3\right),$$

где $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$.

(a) Докажите, что эта форма действительно является билинейной.
(b) Докажите, что эта форма является симметричной, то есть $B(\vec{x},\vec{y})=B(\vec{y},\vec{x})$.
(c) Для всех пар базисных векторов e_i, e_j найдите значение формы $B(e_i,e_j)$.
(d) Составьте матрицу билинейной формы B.
(e) Выпишите квадратичную форму, соответствующую билинейной форме B.
(f) Пусть A — оператор, записывающийся в стандартном базисе той же матрицей, что и билинейная форма B. Найдите все собственные векторы и все собственные значения оператора A.
(g) Проверьте, что собственные векторы оператора A взаимно ортогональны.
(h) Нормируйте базис из собственных векторов оператора A, то есть замените каждый вектор на коллинеарный ему вектор длины 1.
(i) Составьте матрицы переходов от стандартного базиса к базису, найденному в предыдущем пункте, и обратно.
(j) Запишите оператор A в базисе, найденном в 1h, то есть представьте матрицу A в виде $A=C^{-1}DC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
(k) Запишите билинейную форму в базисе, найденном в 1h, то есть представьте матрицу A в виде $A=C^TDC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
(l) Является ли соответствующая квадратичная форма положительно определенной, отрицательно определенной, положительно полупоределенной, отрицательно полуопределенной?

Задача 2. Рассмотрим билинейную форму,

$$B(\vec{x},\vec{y}) = -x_1\left(y_1-4y_2+8y_3\right) - x_2\left(-4y_1+7y_2+4y_3\right) - x_3\left(8y_1+4y_2+y_3\right),$$

где $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ и $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$.

(a) Докажите, что эта форма действительно является билинейной.
(b) Докажите, что эта форма является симметричной, то есть $B(\vec{x},\vec{y})=B(\vec{y},\vec{x})$.
(c) Для всех пар базисных векторов e_i, e_j найдите значение формы $B(e_i,e_j)$.
(d) Составьте матрицу билинейной формы B.
(e) Выпишите квадратичную форму, соответствующую билинейной форме B.

(f) Пусть A — оператор, записывающийся в стандартном базисе той же матрицей, что и билинейная форма B. Найдите все собственные векторы и все собственные значения оператора A.
(g) Найдите базис, состоящий из собственных векторов оператора A. Однозначно ли решается эта задача? Почему?
(h) Нормируйте базис из собственных векторов оператора A, то есть замените каждый вектор на коллинеарный ему вектор длины 1.
(i) Составьте матрицы переходов от стандартного базиса к построенному в предыдущем пункте и обратно.
(j) Получился ли базис ортонормированным? Как будет меняться матрица оператора при переходе к этому базису? А матрица билинейной формы?
(k) При помощи процесса ортогонализации постройте из базиса, найденного в 2h ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов рассматриваемого оператора.
(l) Запишите оператор A в базисе, построенном в предыдущем пункте, то есть представьте матрицу A в виде $A = C^{-1}DC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
(m) Запишите билинейную форму в базисе, найденном в 2k, то есть представьте матрицу A в виде $A = C^T DC$, где C — ортогональная матрица. Проверьте результат, перемножив матрицы.
(n) Является ли соответствующая квадратичная форма положительно определенной, отрицательно определенной, положительно полупоределенной, отрицательно полуопределенной?

Задача 3. Нарисуйте на плоскости множество точек $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, для которых $f(\vec{x}) = 1$, если квадратичная форма $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задаётся формулой
(a) $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$;
(b) $f(\vec{x}) = 7x_1^2 + 3x_2^2$;
(c) $f(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2$.

Задача 4. Приведите квадратичную форму (a) $f(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2$; (b) $f(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$ к главным осям. Нарисуйте на плоскости (в старых координатах) множество точек $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, для которых $f(\vec{x}) = 1$. На том же рисунке изобразите новые координатные оси.

Задача 5. Рассмотрим функцию $F(t, x, y, z) = -3t^2 - 2tx - x^2 - 4xy - 7y^2 - 4yz - 7z^2$. Является ли точка $(0, 0, 0, 0)$ для функции F точкой максимума, минимума, или ни тем, ни другим?

Задача 6. Рассмотрим квадратичную форму Q, заданную в стандартном базисе матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим трёхмерное подпространство W, являющееся ортогональным дополнением к подпространству, натянутому на вектор $u = (1, -3, -1, 2)$. Задайте в W какой-нибудь базис и найдите матрицу ограничения формы Q на это подпространство. Является ли это ограничение положительно определенной формой, отрицательно определенной или знаконеопределенной?

Задача 7. Пусть на $\mathbb{R}^2$ действует линейный оператор $\mathcal{A}$, заданный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим единичную окружность, заданную уравнением $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (иными словами, для стандартного скалярного произведения она задётся уравнением $(u, u) = 1$, где $u = (x_1, x_2)$; здесь и далее мы будем отождествлять точки и их радиус-векторы).

(a) Найдите уравнение образа единичной окружности под действием оператора $\mathcal{A}$.

(b) Пусть u — вектор, принадлежащий единичной окружности, $v = Au$. Докажите, что вектор v удовлетворяет уравнению $((AA^T)^{-1}v, v) = 1$. Запишите это уравнение в координатах и сравните с результатом предыдущего пункта.

(c) Найти ортонормированный диагонализирующий базис для формы, заданной матрицей AA^T.

(d) Как выглядит матрица формы, заданной в стандартном базисе матрицей $(AA^T)^{-1}$, в новом базисе из предыдущего пункта?

(e) Нарисуйте, как выглядит образ единичной окружности под действием оператора $\mathcal{A}$ в новых координатах.

(f) Нарисуйте, как выглядит образ единичной окружности под действием оператора $\mathcal{A}$ в исходных координатах.

(g) Найдите вектор u, принадлежащий единичной окружности, для которого $\|\mathcal{A}u\|^2$ достигает своего максимального значения. Нарисуйте этот вектор на картинке из предыдущего пункта. (Докажите, что это действительно максимум. Это проще делать в нормализующих координатах.)

(h) Найдите вектор u, принадлежащий единичной окружности, для которого $\|\mathcal{A}u\|^2$ достигает своего минимального значения. Нарисуйте этот вектор на картинке из предыдущего пункта.