

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Линейная алгебра

Домашнее задание №8

И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Ситников Никита Дмитриевич

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка умножается на  $e^{-t}$ , где  $t$  — число дней, прошедших с дедлайна (вещественное число, не округляется).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

## Задачи

**Задача 1.** Найти все собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей  $A$ . Найти алгебраические и геометрические кратности каждого собственного значения. Найти, если это возможно, такую невырожденную матрицу  $C$ , что  $A = CDC^{-1}$ , где  $D$  — диагональная матрица (все внедиагональные элементы равны нулю). Если невозможно, докажете это. Собственные значения, собственные векторы и матрица  $D$  могут быть комплексными.

a.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -13 \\ 0 & 15 & 39 \\ 0 & -4 & -10 \end{pmatrix}$ .

b.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Задача 2.** Как известно, у диагонализуемых матриц  $2 \times 2$  есть (как минимум) два (линейно независимых) собственных вектора, а у недиагонализуемых (над  $\mathbb{C}$ ) — только один. Будем непрерывно менять матрицу, так, чтобы она в какой-то момент стала недиагонализуемой. Собственные векторы будут непрерывно меняться вместе с матрицей. Куда денется один собственный вектор, когда матрица станет недиагонализуемой?

Чтобы ответить на этот вопрос, изучим матрицу

$$A(s) = \begin{pmatrix} -3s - 20 & 4s + 24 \\ -3s - 15 & 4s + 18 \end{pmatrix},$$

зависящую от вещественного параметра  $s$ . При каком значении  $s$  матрица будет недиагонализуема? Обозначим это значение через  $s_*$ . Пусть  $u(s) = (u_1(s), u_2(s))$  и  $v(s) = (v_1(s), v_2(s))$  —

два собственных вектора матрицы  $A(s)$ . Обозначим через  $\varphi(s) = u_2(s)/u_1(s)$  и  $\psi(s) = v_2(s)/v_1(s)$  угловые коэффициенты собственных векторов. Найдите  $\lim_{s \rightarrow s_*} \varphi(s)$  и  $\lim_{s \rightarrow s_*} \psi(s)$ ? Как значения этих пределов соотносятся друг с другом? (Если вдруг какие-то из этих пределов оказались равны бесконечности, поменяйте местами первую и вторую компоненты каждого вектора в определениях  $\varphi$  и  $\psi$ .) Что вы можете сказать про собственные подпространства оператора  $A(s)$ ? И куда, в конце концов, девается один из собственных векторов, когда матрица перестаёт быть диагонализируемой?!

**Задача 3.** Оператор  $\mathcal{A}$  действует на четырёхмерном векторном пространстве  $V$  над полем вещественных чисел. В  $V$  задан базис  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Известно, что подпространства  $V_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$  и  $V_2 = \langle e_3, e_4 \rangle$  являются инвариантными для оператора  $\mathcal{A}$ . Ограничение оператора  $\mathcal{A}$  на  $V_1$  является поворотом на угол  $\frac{5\pi}{4}$  против часовой стрелки (от  $e_1$  к  $e_2$ ). Ограничение оператора  $\mathcal{A}$  на  $V_2$  в базисе  $(e_3, e_4)$  задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 14 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}.$$

- Записать матрицу оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ .
- Найти все инвариантные подпространства этого оператора (кроме нулевого и всего  $V$ ).
- Разложить всё пространство в прямую сумму инвариантных подпространств как можно меньшей размерности.
- Найти базис, в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  имеет блочно-диагональную форму с блоками как можно меньшего размера.

**Задача 4.** Рассмотрим линейный оператор  $\mathcal{A}$ , заданный матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & -10 & 12 \\ 5 & -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Докажите, что оператор  $\mathcal{A}$  является нильпотентным.
- Найдите  $A^2$ .
- Найдите любой такой вектор  $u$ , что  $A^2u \neq 0$ .
- Найдите такие векторы  $v_1, v_2, v_3$ , что  $Av_1 = 0$ ,  $Av_2 = v_1$  и  $Av_3 = v_2$ . (Подсказка: в качестве одного из этих векторов можно взять вектор  $u$ . В качестве какого?)
- Найдите базис, в котором матрица оператора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Подсказка: вы уже это сделали.)