Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год
Линейная алгебра
Домашнее задание №8
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих
Фамилия и имя студента: Назаренко Полина Андреевна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка умножается на e^{-t}, где t — число дней, прошедших с дедлайна (вещественное число, не округляется).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. Найти все собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A. Найти алгебраические и геометрические кратности каждого собственного значения. Найти, если это возможно, такую невырожденную матрицу C, что $A = CDC^{-1}$, где D — диагональная матрица (все внедиагональные элементы равны нулю). Если невозможно, докажите это. Собственные значения, собственные векторы и матрица D могут быть комплексными.

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -37 & 11 & -40 \\ -9 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

b. $A = \begin{pmatrix} 3 & -12 & -36 \\ 0 & -5 & -24 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Как известно, у диагонализируемых матриц 2×2 есть (как минимум) два (линейно независимых) собственных вектора, а у недиагонализируемых (над $\mathbb{C}$) — только один. Будем непрерывно менять матрицу, так, чтобы она в какой-то момент стала недиагонализируемой. Собственные векторы будут непрерывно меняться вместе с матрицей. Куда денется один собственный вектор, когда матрица станет недиагонализируемой?

Чтобы ответить на этот вопрос, изучим матрицу

$$A(s) = \begin{pmatrix} 4s + 15 & 3s + 12 \\ -4s - 20 & -3s - 16 \end{pmatrix},$$

зависящую от вещественного параметра s. При каком значении s матрица будет недиагонализируема? Обозначим это значение через s_*. Пусть $u(s) = (u_1(s), u_2(s))$ и $v(s) = (v_1(s), v_2(s))$ —

два собственных вектора матрицы $A(s)$. Обозначим через $\varphi(s) = u_2(s)/u_1(s)$ и $\psi(s) = v_2(s)/v_1(s)$ угловые коэффициенты собственных векторов. Найдите $\lim_{s\to s_*} \varphi(s)$ и $\lim_{s\to s_*} \psi(s)$? Как значения этих пределов соотносятся друг с другом? (Если вдруг какие-то из этих пределов оказались равны бесконечности, поменяйте местами первую и вторую компоненты каждого вектора в определениях φ и ψ.) Что вы можете сказать про собственные подпространства оператора $A(s)$? И куда, в конце концов, девается один из собственных векторов, когда матрица перестаёт быть диагонализируемой?!

Задача 3. Оператор $\mathcal{A}$ действует на четырёхмерном векторном пространстве V над полем вещественных чисел. В V задан базис (e_1, e_2, e_3, e_4). Известно, что подпространства $V_1 = \langle e_1, e_2\rangle$ и $V_2 = \langle e_3, e_4\rangle$ являются инвариантными для оператора $\mathcal{A}$. Ограничение оператора $\mathcal{A}$ на V_1 является поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$ против часовой стрелки (от e_1 к e_2). Ограничение оператора $\mathcal{A}$ на V_2 в базисе (e_3, e_4) задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} 13 & -36 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

a. Записать матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4).
b. Найти *все* инвариантные подпространства этого оператора (кроме нулевого и всего V).
c. Разложить всё пространство в прямую сумму инвариантных подпространств как можно меньшей размерности.
d. Найти базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональную форму с блоками как можно меньшего размера.

Задача 4. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}$, заданный матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Докажите, что оператор $\mathcal{A}$ является нильпотентным.
b. Найдите A^2.
c. Найдите любой такой вектор u, что $A^2u \neq 0$.
d. Найдите такие векторы v_1, v_2, v_3, что $Av_1 = 0$, $Av_2 = v_1$ и $Av_3 = v_2$. (Подсказка: в качестве одного из этих векторов можно взять вектор u. В качестве какого?)
e. Найдите базис, в котором матрица оператора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Подсказка: вы уже это сделали.)

 Фамилия и имя студента: Назаренко Полина Андреевна