

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год

Линейная алгебра

Домашнее задание №7

И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Сергеев Максим Сергеевич

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка умножается на  $e^{-t}$ , где  $t$  — число дней, прошедших с дедлайна (вещественное число, не округляется).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

## Задачи

**Задача 1.** Найти все собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей  $A$ . Найти, если это возможно, такую невырожденную матрицу  $C$ , что  $A = CDC^{-1}$ , где  $D$  — диагональная матрица (все внедиагональные элементы равны нулю). Если невозможно, докажите это. Собственные значения, собственные векторы и матрица  $D$  могут быть комплексными.

a.  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

b.  $A = \begin{pmatrix} 17 & 26 \\ -10 & -15 \end{pmatrix}$ .

c.  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

d.  $A = \begin{pmatrix} 18 & 48 \\ -6 & -16 \end{pmatrix}$ .

e.  $A = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 26 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ .

**Подсказка.** Чтобы найти корни многочлена третьей степени, можно угадать один из них (если он целый, то обязан быть делителем свободного члена), а потом разделить исходный многочлен на  $x - x_0$  (где  $x_0$  — угаданный корень) и решить получившееся квадратное уравнение.

**Задача 2.** Рассмотрим последовательность  $\{x_k\}$ , заданную следующим образом:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \quad x_{k+1} = 6x_k - 8x_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

a. Найти такую матрицу  $A$ , что для всех  $k = 2, 3, \dots$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix}.$$

b. Найти такую невырожденную матрицу  $C$ , что  $A = CDC^{-1}$ , где  $D$  — диагональная матрица.

c. Найти явную формулу для  $A^n$  для произвольного натурального  $n$ . Формула должна допускать вычисление матрицы  $A^n$  с помощью конечного числа арифметических операций (сложение, умножение, деление, возведение в натуральную степень, извлечение квадратного корня), не зависящего от  $n$ . (Подсказка: использовать результат предыдущего пункта.)

d. Найти явную формулу для  $x_n$  для произвольного натурального  $n$ .

**Задача 3.** Рассмотрим линейное пространство всех многочленов от переменной  $x$ . На нём действует оператор  $F$ , заданный следующим образом: для любого многочлена  $f$ ,  $(Ff)(x) = xf'(x)$ . Найти все собственные значения и собственные векторы этого оператора.

(Заметим, что рассматриваемое пространство бесконечномерно, поэтому в нём нельзя задать конечный базис, а оператор  $F$  нельзя задать (конечной) матрицей.)

**Задача 4.** Рассмотрим оператор  $R_\alpha$ , действующий на плоскости и поворачивающий плоскость на угол  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$  против часовой стрелки.

a. Записать его матрицу в стандартном базисе.

b. Найти собственные значения этой матрицы. Обозначим их через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

c. Найти модуль и аргумент  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  как комплексных чисел.

d. Пусть  $z$  — произвольное комплексное число. Что происходит с  $z$  (геометрически) при умножении на  $\lambda_1$ ? На  $\lambda_2$ ? (Мы как обычно отождествляем комплексное число с вектором на плоскости, начало которого находится в нуле, а конец — в точке, абсцисса которой равна вещественной части  $z$ , а ордината — мнимой.)