Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год
Линейная алгебра
Домашнее задание №7
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих
Фамилия и имя студента: Машанова Инна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. Работа после срока не принимается.

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. Найти все собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A. Найти, если это возможно, такую невырожденную матрицу C, что $A = CDC^{-1}$, где D — диагональная матрица (все внедиагональные элементы равны нулю). Если невозможно, докажите это. Собственные значения, собственные векторы и матрица D могут быть комплексными.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b. $A = \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

c. $A = \begin{pmatrix} 8 & -40 & 20 \\ 4 & -14 & 10 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

d. $A = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$.

e. $A = \begin{pmatrix} 29 & -52 \\ 20 & -35 \end{pmatrix}$.

Подсказка. Чтобы найти корни многочлена третьей степени, можно угадать один из них (если он целый, то обязан быть делителем свободного члена), а потом разделить исходный многочлен на $x - x_0$ (где x_0 — угаданный корень) и решить получившееся квадратное уравнение.

Задача 2. Рассмотрим последовательность $\{x_i\}$, заданную следующим образом:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 4, \quad x_{n+1} = -x_n - 12x_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

a. Найти такую матрицу A, что для всех $n = 2, 3, \ldots$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

b. Найти такую невырожденную матрицу C, что $A = CDC^{-1}$, где D — диагональная матрица.
c. Найти явную формулу для A^n для произвольного n. (Подсказка: использовать результат предыдущего пункта.)
d. Найти явную формулу для x_n для произвольного n.

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство всех многочленов от переменной x. На нём действует оператор F, заданный следующим образом: для любого многочлена f, $(Df)(x) = xf'(x)$. Найти все собственные значения и собственные векторы этого оператора.

(Заметим, что рассматриваемое пространство бесконечномерно, поэтому в нём нельзя задать базис, а оператор F нельзя задать матрицей.)

Задача 4. Рассмотрим оператор R_α, действующий на плоскости и поворачивающий плоскость на угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$ против часовой стрелки.
a. Записать его матрицу в стандартном базисе.
b. Найти собственные значения этой матрицы. Обозначим их через λ_1 и λ_2.
c. Найти модуль и аргумент λ_1 и λ_2 как комплексных чисел.
d. Пусть z — произвольное комплексное число. Что происходит с z (геометрически) при умножении на λ_1? На λ_2? (Мы как обычно отождествляем комплексное число с вектором на плоскости, начало которого находится в нуле, а конец — в точке, абсцисса которой равна вещественной части z, а ордината — мнимой.)