Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019—20 уч. год
Линейная алгебра
Домашнее задание №7
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих
Фамилия и имя студента: Чувелева Алика Анатольевна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка умножается на e^{-t}, где t — число дней, прошедших с дедлайна (вещественное число, не округляется).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. Найти все собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A. Найти, если это возможно, такую невырожденную матрицу C, что $A = CDC^{-1}$, где D — диагональная матрица (все внедиагональные элементы равны нулю). Если невозможно, докажите это. Собственные значения, собственные векторы и матрица D могут быть комплексными.

a. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

c. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

d. $A = \begin{pmatrix} -18 & 72 & -30 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & -30 & 15 \end{pmatrix}$.

e. $A = \begin{pmatrix} -14 & -36 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}$.

Подсказка. Чтобы найти корни многочлена третьей степени, можно угадать один из них (если он целый, то обязан быть делителем свободного члена), а потом разделить исходный многочлен на $x - x_0$ (где x_0 — угаданный корень) и решить получившееся квадратное уравнение.

Задача 2. Рассмотрим последовательность $\{x_k\}$, заданную следующим образом:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -1, \quad x_{k+1} = -5x_k - 6x_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

a. Найти такую матрицу A, что для всех $k = 2, 3, \ldots$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix}.$$

b. Найти такую невырожденную матрицу C, что $A = CDC^{-1}$, где D — диагональная матрица.

c. Найти явную формулу для A^n для произвольного натурального n. Формула должна допускать вычисление матрицы A^n с помощью конечного числа арифметических операций (сложение, умножение, деление, возведение в натуральную степень, извлечение квадратного корня), не зависящего от n. (Подсказка: использовать результат предыдущего пункта.)

d. Найти явную формулу для x_n для произвольного натурального n.

Задача 3. Рассмотрим линейное пространство всех многочленов от переменной x. На нём действует оператор F, заданный следующим образом: для любого многочлена f, $(Ff)(x) = xf'(x)$. Найти все собственные значения и собственные векторы этого оператора.

(Заметим, что рассматриваемое пространство бесконечномерно, поэтому в нём нельзя задать конечный базис, а оператор F нельзя задать (конечной) матрицей.)

Задача 4. Рассмотрим оператор R_α, действующий на плоскости и поворачивающий плоскость на угол $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ против часовой стрелки.

a. Записать его матрицу в стандартном базисе.

b. Найти собственные значения этой матрицы. Обозначим их через λ_1 и λ_2.

c. Найти модуль и аргумент λ_1 и λ_2 как комплексных чисел.

d. Пусть z — произвольное комплексное число. Что происходит с z (геометрически) при умножении на λ_1? На λ_2? (Мы как обычно отождествляем комплексное число с вектором на плоскости, начало которого находится в нуле, а конец — в точке, абсцисса которой равна вещественной части z, а ордината — мнимой.)

 Фамилия и имя студента: Чувелева Алика Анатольевна