Теорема Гамильтона – Кэли:

$$A \qquad \chi_A(A) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{нулевая} \\ \text{матрица}}}{0}$$

<u>Д-во</u> Будем рассм. A как матр. лин. оператора, действующего в вект. пр-ве над $\mathbb{C}$.

У A есть хотя бы одно собств. значение λ_1 и соотв. собств. в-р δ_1.

Дополним в-р δ_1 до базиса:

$$(\underset{\substack{\| \\ \delta_1}}{e_1}, e_2, \dots, e_n)$$

Перейдем в этот базис. В нем лин. оп., к-ый в исходном базисе задавался матрицей A, будет задаваться матрицей:

что угодно

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right) \begin{array}{l} \}1 \\ \\ \\ \}n-1 \end{array}$$

$\underbrace{}_{1}$ $\underbrace{}_{n-1}$

$n = \dim V$

$$\left(\begin{array}{c|c} \boxed{} & * \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Д-м теорему П.К. по индукции по n.

1. База индукции: $n=1$

Матр $A = \boxed{a_{11}}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(a_{11} - \lambda) = a_{11} - \lambda$$

$$\chi_A(A) = a_{11} - a_{11} = 0.$$

2. Индуктивный переход.

Пусть уже д-ли ЗКЯ $n = k-1$. Д-м для $n = k$.

$$A \sim \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \underbrace{\tilde{A}}_{k-1} \end{array}\right) \Big\}\, k-1$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1^2 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A}^2 \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right)^m = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1^m & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A}^m \\ 0 & \end{array}\right)$$

Пусть есть мн-н.

$$P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_d x^d$$

$$P\left(\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c|c} P(\lambda_1) & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & P(\tilde{A}) \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\begin{pmatrix} b_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_0 \end{pmatrix} + b_1 \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right) +$$

$$+ b_2 \cdot \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right)^2 + \dots +$$

$$+ b_d \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right)^d$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right)$$

Как устроен хар. мн-н?

$$\det\left(\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right) - \lambda \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 - \lambda & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A} - \lambda E \\ 0 & \end{array}\right) =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda) \cdot \underbrace{\det(\tilde{A} - \lambda E)}_{\chi_{\tilde{A}}(\lambda)} =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda)\, \chi_{\tilde{A}}(\lambda)$$

$$\chi_A(A) = \underbrace{(\lambda_1 \cdot E - A)} \cdot \chi_{\tilde{A}}(A)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} - \left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} * & \\ \hline 0 & \cdots\ 0 \\ \vdots & \\ 0 & \cdots\ 0 \end{array}\right)$$

$$\chi_{\tilde{A}}(A) = \chi_{\tilde{A}}\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \chi_{\tilde{A}}(\lambda_1) & * \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \chi_{\tilde{A}}(\tilde{A}) \end{array}\right) =$$

Матр $\tilde{A}$ имеет разм. $k-1$.
Для неё, по предп. инд., т. Г.-К. верна

$$\Rightarrow \chi_{\tilde{A}}(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Итак, $\chi_A(A) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline * \end{array}\right) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad \boxtimes$$

<u>Опр.</u> Оператор (или матр.) A наз-ся нильпотентным, если $\exists$ такое $N \in \mathbb{N}$:

$$A^N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Примеры:</u> $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad e_1 \mapsto 0$, $\quad e_2 \mapsto e_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \times \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Утв. Пусть у оператора A есть ровно одно собств. зн., и оно равно 0.

Тогда A — нильпотентный.

Д-во: Воспользуемся теоремой Г.-К.

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n}$$

(т.к. нет др. с.зн., кроме 0)

$$\underbrace{\chi_A(A)}_{=0} = (-1)^n A^n.$$

теор. Г.-К.

$\boxtimes$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & \\ \cdots & a_{22}-\lambda & \cdots \\ & \cdots & \cdots \\ & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)}_{(-1)^n\cdot\lambda^n+\ldots} + \text{мл. степени по } \lambda$$

<u>Утв.</u> Пусть у матр A есть единств. с. зн. λ_1 и оно не равно нулю.

Тогда $A = \lambda_1 \cdot E + N$, где

матрица

N — нильпотентна

Д-во

Пример: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Рассм. матр $A - \lambda_1 E$.

Каковы её собств. значения?

$$\chi_{A-\lambda_1 E}(\lambda) = \det(A - \lambda_1 E - \lambda E) =$$

$$= \det(A - \underbrace{(\lambda_1 + \lambda)}_{\tilde{\lambda}} E) \overset{?}{=} 0$$

$$\parallel$$

$$\chi_A(\lambda_1 + \lambda) \overset{?}{=} 0 \qquad \lambda_1 + \lambda = \lambda_1$$

$$\lambda = 0.$$

$\Rightarrow$ у матр $A - \lambda_1 E$

есть единств. с.зн., и оно равно 0.

$$\Rightarrow A - \lambda_1 E = N$$

нильп. по утв.

$$\Rightarrow A = \lambda_1 E + N.$$

Следующая цель:
как устроены нильпотентные матрицы?

1). Рассм. разм. 2.

Утв. Пусть A – нильп. матр. розм. 2×2.

ненулевая.

Тогда $\exists$ базис: $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Д-во A – ненулевая

$\Rightarrow \exists$ в-р: v_2: $Av_2 \neq 0$.

$$v_2 \xmapsto{A} v_1 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_1 = A^2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2$$

v_1 и v_2 лин. нез.

и образуют базис.

Запишем матр A после перехода к этому базису:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxtimes$