**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018-19 уч. год.**
**Математический анализ 1**
**Семинар 1 (6 сентября 2018)**

*И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих*

**Задача 1.** Завершить доказательство единственности представления любого ненулевого рационального числа в виде несократимой дроби.

**Задача 2.** Доказать, что рациональные числа всюду плотны, то есть для любого интервала $(a; b)$, $b > a$, существует бесконечное количество рациональных чисел, принадлежащих этому интервалу.

**Задача 3.** Доказать, что иррациональные числа тоже всюду плотны.

**Задача 4.** Доказать, что квадратный корень из любого простого числа иррационален.

**Задача 5.** Может ли
(a) сумма двух рациональных чисел быть иррациональным числом?
(b) сумма рационального и иррационального — рациональным?
(c) сумма двух иррациональных чисел — рациональным числом?
(d) произведение двух иррациональных чисел — рациональным числом?

**Задача 6.** Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ является иррациональным.

**Задача 7.** Доказать, что любое рациональное число задается бесконечной периодической десятичной дробью (быть может, с периодом (0)).

**Задача 8.** Чему равняется $1 - 0{,}(9)$?

**Задача 9.** Доказать, что любая бесконечная периодическая десятичная дробь задает рациональное число.

**Задача 10.** Представьте, что вы — древний грек. Что вы можете сказать о числе $\pi$? Как доказать, используя только геометрические рассуждения, что $\pi > 3$? Что $\pi < 4$? Можете ли вы доказать более точные оценки?

**Задача 11.** Пусть $a$ и $b$ – целые числа и $a = bq + r$, где $q$ и $r$ тоже целые числа. Докажите, что в этом случае $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$.

**Задача 12.** (Алгоритм Евклида) Пусть $a$ и $b$ — целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел

$$a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \dots r_{n-1} > r_n > r_{n+1} = 0$$

определена следующим образом: каждое $r_k$ — это остаток от деления предпредыдущего числа на предыдущее, а $r_{n-1}$ делится на $r_n$ нацело.

Докажите, что $\text{НОД}(a, b) = r_n$

**Задача 13.** Найти наибольший общий делитель (НОД) для чисел
(a) 6 и 15.
(b) 228 и 60.

**Задача 14.** Покрыть прямоугольник
(a) $6 \times 15$
(b) $228 \times 60$
одинаковыми квадратами с максимально возможной стороной.

**Задача 15** (*)**.** С помощью алгоритма Евклида доказать, что для любых натуральных чисел $m$ и $n$ найдутся такие целые числа $s$ и $t$, что $sm + tn = \text{НОД}(m, n)$. Однозначным ли образом они определены?

# Дополнительные задачи

**Задача 16.** Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$, $x > 0$. Показать, что если $f(x) = x$, то $x = \sqrt{2}$.

Рассмотрим последовательность чисел, которая строится по следующему закону. Первое число этой последовательности, обозначаемое $x_0$, равняется единице. Каждое следующее число получается в результате применения к предыдущему функции $f(x)$, определенной в предыдущей задаче. Иными словами, $x_{n+1} = f(x_n)$. (Говорят, что мы рассматриваем *итерации* функции $f$.) Оказывается, пределом этой последовательности (при $n \to \infty$) является число $\sqrt{2}$. Этот факт можно использовать для приближенного нахождения $\sqrt{2}$.

**Задача 17.** Вычислить первые 5 членов последовательности $x_n$.

**Задача 18.** Как модифицировать функцию $f$, чтобы новая последовательность стремилась к корню из данного числа?

**Задача 19.** Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, $x > 0$. Показать, что если $g(x) = x$, то $x = \sqrt{2}$.

**Задача 20.** Пусть последовательность $y_n$ задается следующим образом: $y_0 = 1$, $y_{n+1} = g(y_n)$. Пределом такой последовательности является $\sqrt{2}$. Вычислить первые 5 элементов этой последовательности. Как вы считаете, какая из двух последовательностей ($x_n$ или $y_n$) быстрее сходится к $\sqrt{2}$?

**Задача 21.** Как модифицировать функцию $g$, чтобы новая последовательность стремилась к корню из данного числа? (Полученная таким образом формула называется *итерационной формулой Герона.*)

**Задача 22** (**)**.** Доказать, что $y_n = x_{2^n}$, то есть при применении итерационной формулы Герона получаются элементы последовательности $x_n$ с номерами, равными степеням двойки.