ОП «Политология», 2018-19
Математика и статистика, часть 2
Тренировочные задания по блоку «Статистика»
Не является типовым вариантом экзамена! (4 модуль)
А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева, Н. А. Василёнок

Задача 1. Дана выборка: 4, 18, 9, 10, −1, 9, 25, 18, 9

(a) Запишите вариационный ряд и ранги наблюдений.
(b) Найдите медиану этой выборки. Проинтерпретируйте полученное занчение.
(c) Найдите верхний и нижний квартили этой выборки.
(d) Проверьте, есть ли в выборке нетипичные значения (выбросы). Если нет, напишите, что их нет, если есть – перечислите.
(e) Постройте для данной выборки «ящик с усами».
(f) Постройте гистограмму для данной выборки, выбрав стартовым значением минимальное значение в выборке и интервал группировки равный 4.
(g) Найдите выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение.

Решение.

1. Вариационный ряд: −1, 4, 9, 9, 9, 10, 18. 18, 25

   Ранги: $R_1 = 2$, $R_2 = 7.5$, $R_3 = 4$, $R_4 = 6$, $R_5 = 1$, $R_6 = 4$, $R_7 = 9$, $R_8 = 7.5$, $R_9 = 4$.

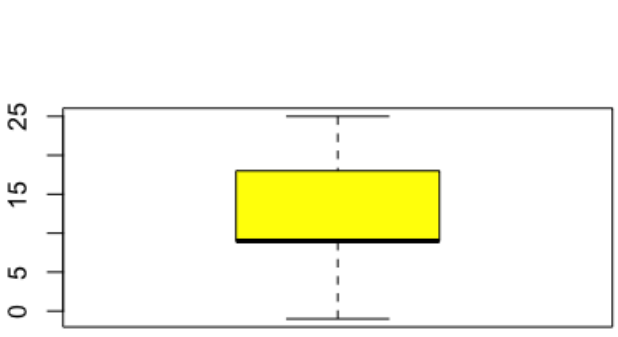
2. Медиана: $med(X) = 9$; Верхний квартиль: $Q_3 = 18$; Нижний квартиль: $Q_1 = 9$.

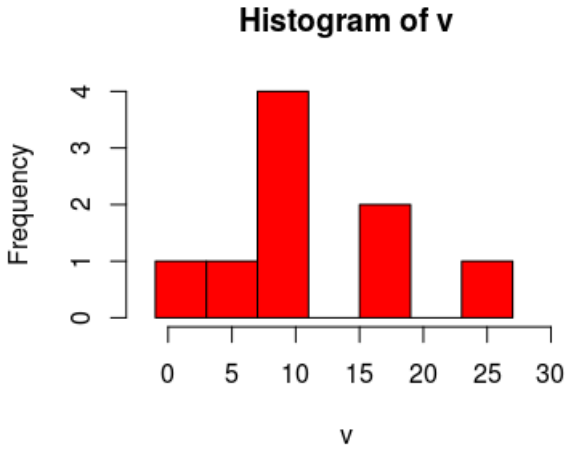
3. Границы типичных значений:

$$[9 - 1.5 \cdot (18 - 9); 18 + 1.5 \cdot (18 - 9)] = [-4.5; 31.5].$$

   Нетипичных значений нет, все входят в границы типичных значений.

4. «Ящик с усами» и гистограмма (медиана совпадает с нижним квартилем, поэтому ящик получился таким):





5. Выборочное среднее: $\bar{x} = 11.2$ (для удобства дальнейших расчетов округлим до 11).

   Выборочная дисперсия: $s^2 = \dfrac{(4-11)^2 + (18-11)^2 + \cdots + (9-11)^2}{9-1} \approx 63$.

   Выборочное стандартное отклонение: $s = \sqrt{63} \approx 7.9$.

Задача 2. Дана выдача R, в которой представлено описание переменной *число лошадиных сил автомобиля*:

```
Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
52.0    96.5   123.0   146.7   180.0   335.0
```

Поясните, что представляет собой каждое значение в выдаче.

Решение.
Самое маленькое число лошадиных сил автомобиля в выборке равно 52, самое большое – 335. Среднее число лошадиных сил автомобиля в выборке равно 146.7. Половина автомобилей в выборке имеют число лошадиных сил не выше 123. 25% автомобилей в выборке имеют число лошадиных сил не выше 96.5. 75% автомобилей в выборке имеют число лошадиных сил не выше 180 (или 25% автомобилей – от 180 и выше).

Задача 3. Представьте, что вам необходимо построить доверительный интервал для средней стоимости квартиры (в рублях) в Центральном округе Москвы. Известно, что доверительный интервал будет строиться на основе стоимости 26 квартир Центрального округа.

Найдите t-значение, на значение которой будет умножаться стандартная ошибка выборки при расчете доверительного интервала, приняв уровень доверия равным: а) 90%; б) 95%; в) 99%; г) 99.5%.

Решение.
Необходимое t-значение берется из распределения Стьюдента (t-распределение). Распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\mathrm{df} = n - 1 = 26 - 1 = 25$[1].

Если выбрать уровень доверия $\gamma = 0.9$, то тогда t^* – это квантиль уровня 0.95, и

$$t^* = t_{0.95,df=25} = 1.711.$$

Если выбрать уровень доверия $\gamma = 0.95$, то тогда t^* – это квантиль уровня 0.975, и

$$t^* = t_{0.975,df=25} = 2.064.$$

Если выбрать уровень доверия $\gamma = 0.99$, то тогда t^* – это квантиль уровня 0.995, и

$$t^* = t_{0.995,df=25} = 2.797.$$

Если выбрать уровень доверия $\gamma = 0.995$, то тогда t^* – это квантиль уровня 0.9975, и

$$t^* = t_{0.9975,df=25} = 3.745.$$[2]

Задача 4. Исследователь оценивает долю жителей страны А, которые поддерживают новый закон о налогообложении. Он опросил 1600 человек и выяснил, что 1000 человек из них поддерживают новый закон. Постройте 92%-ный доверительный интервал для доли жителей, поддерживающих новый закон. Что произойдет с длиной доверительного интервала, если увеличить объем выборки в 4 раза (при прочих равных условиях)?

Решение.
Выборочная доля: $\hat{p} = 1000/1600 = 0.625 \approx 0.63$.

Стандартная ошибка: $se = \sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \approx 0.012$.

z-значение: $z^* = z_{1-\frac{1-0.92}{2}} = z_{0.96} = 1.75$.

Доверительный интервал: $[0.63 - 1.75 \cdot 0.012; 0.63 + 1.75 \cdot 0.012]$, т.е. $[0.61; 0.65]$.

Если увеличить объем выборки в 4 раза, то длина доверительного интервала уменьшится в два раза.

[1] Данное значение отсутствует в таблице, для расчетов берем ближайшее $\mathrm{df} = 24$ (можно 26, главное указать). В экзамене будут значения, которые есть в таблице.

[2] Тоже берем ближайшее – с уровнем 0.9995

Задача 5. Группа политологов проводит исследование, посвященное политическим предпочтениям молодежи. Выяснилось, что 74% респондентов придерживаются либеральных взглядов. Всего было опрошено 100 человек. Вам необходимо проверить гипотезу о равенстве доли приверженцев либеральных взглядов 0.75.

(a) Сформулируйте нулевую гипотезу. Сформулируйте альтернативную гипотезу, считая, что она 1) односторонняя (направление выберите, исходя из данных); 2) двусторонняя.
(b) Какое распределение имеет статистика критерия, используемого для проверки нулевой гипотезы?
(c) Рассчитайте наблюдаемое значение z-статистики и p-value. Что означает это значение? Есть ли основания отвергнуть нулевую гипотезу?
(d) Изменится ли вывод относительно нулевой гипотезы, если мы примем уровень значимости равный 10%? Уровень значимости равный 1%?

Решение.

Случай 1 (односторонняя альтернатива)

1. $H_0 : p = 0.75$, $H_1 : p < 0.75$ (левосторонняя, так как $0.74 < 0.75$).

2. Статистика имеет стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$.

3. $z_{набл} = \frac{0.74-0.75}{\sqrt{\frac{0.74 \cdot 0.26}{100}}} \approx -0.23$.

   p-value $= P(z < -0.23) = 1 - P(z > 0.23) = 1 - 0.5910 = 0.409$.

   Вероятность того, что мы получим значение z равное -0.23 или более нетипичное при условии, что нулевая гипотеза верна. Так как $0.409 > 0.05$, на 5% уровне значимости на имеющихся данных нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

   Статистический вывод: на имеющихся данных на уровне значимости 5% нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативы. Содержательный вывод: истинная доля приверженцев либеральных взглядов среди молодежи равна 0.75.

4. Если возьмем уровень значимости $\alpha = 0.1$, то вывод относительно нулевой гипотезы не изменится. Если выберем $\alpha = 0.01$, то тоже не изменится.

Случай 2 (двусторонняя альтернатива)

1. $H_0 : p = 0.75$, $H_1 : p \neq 0.75$.

2. Статистика имеет стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$.

3. $z_{набл} = \frac{0.74-0.75}{\sqrt{\frac{0.74 \cdot 0.26}{100}}} \approx -0.23$.

   p-value $= P(|z| > -0.23) = 2 \cdot (1 - P(z > 0.23)) = 2 \cdot (1 - 0.5910) = 0.818$.

   Вероятность того, что мы получим значение z равное 0.23 или более нетипичное (по модулю) при условии, что нулевая гипотеза верна. Так как $0.818 > 0.05$, на 5% уровне значимости на имеющихся данных нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

   Статистический вывод: на имеющихся данных на уровне значимости 5% нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативы. Содержательный вывод: истинная доля приверженцев либеральных взглядов среди молодежи равна 0.75.

4. Если возьмем уровень значимости $\alpha = 0.1$, то вывод относительно нулевой гипотезы не изменится. Если выберем $\alpha = 0.01$, то тоже не изменится.

Задача 6. Проводится исследование, посвященное уровню жизни в регионах Российской Федерации. Разработана методика оценки, сконструирован интегральный индекс уровня жизни. Проверяется гипотеза о равенстве индекса уровня жизни в регионах европейской части России и азиатской части России.

(a) Сформулируйте нулевую гипотезу и одностороннюю альтернативную гипотезу (направление выберите, исходя из данных).

(b) Какое распределение имеет статистика критерия, используемого для проверки нулевой гипотезы?

(c) Выдача R по результатам проверки нулевой гипотезы выглядит так:

```
data:  e and a
t = 7.9266, df = 138.93, p-value = 6.613e-13
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  6.47209 10.77389
sample estimates:
mean of x mean of y
 74.12198  65.49899
```

Какой вывод, касающийся нулевой гипотезы, можно сделать, если мы проверяем ее на 5% уровне значимости? Сделайте содержательный вывод.

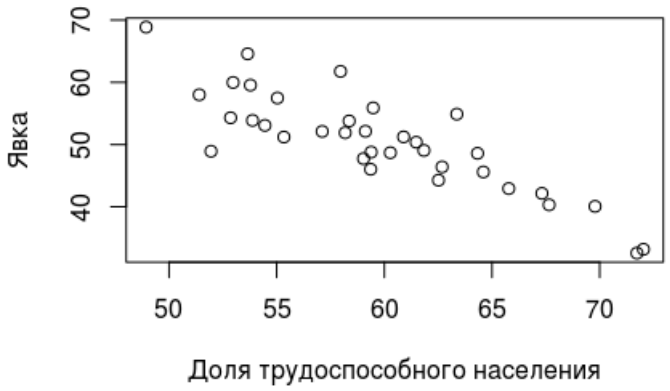
Решение.

1. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

2. Распределение Стьюдента (t-распределение) с $\text{df} = 18 + 14 - 2 = 30$ (в R считается несколько иначе).

3. На имеющихся данных на 10% уровне значимости есть основания отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве средних (p-value $< \alpha$). Содержательный вывод: среднее значение уровня жизни в европейских регионах выше, чем в азиатских.

Задача 7. Дана диаграмма рассеяния явки на выборы (в процентах) и доли трудоспособного населения (в процентах):



(a) Какой вывод о связи двух показателей можно сделать? Можно ли по этому графику сделать вывод, что процент трудоспособного населения оказывает отрицательное влияние на явку?

(b) Представьте, что вам необходимо проверить статистически, есть ли связь между этими двумя показателями. Вы посчитали коэффициент корреляции Пирсона. Сформулируйте нулевую гипотезу, которую необходимо проверить, чтобы выяснить, значим ли коэффициент корреляции. Какое распределение имеет статистика критерия, используемого для проверки гипотезы?

(c) Какое значение должно быть у p-value, чтобы коэффициент корреляции считался значимым на 5% уровне значимости?

Решение.

1. Связь обратная, достаточно сильная – точки образуют «облако», имеющее отрицательный наклон. Нет, нельзя, так как диаграмма рассеяния не показывает причинно-следственные связи.

2. $H_0 : \rho = 0$, $H_1 : \rho \neq 0$.

3. Чтобы коэффициент считался значимым, нужно, чтобы гипотеза о равенстве коэффициента нулю была отвергнута. В таком случае p-value должен быть менее уровня значимости, то есть менее 0.05.

Задача 8. Два эксперта оценивают эссе абитуриентов по английскому языку. Оценки выставляются в 10-балльной шкале. Перед вами оценки, поставленные шести абитуриентам:

Эксперт 1: 10, 8, 6, 4, 3, 9
Эксперт 2: 8, 9, 3, 5, 4, 10

(a) Рассчитайте коэффициент корреляции Спирмена между оценками, поставленными двумя экспертами.

(b) Проверьте гипотезу о равенстве коэффициента корреляции нулю. Сделайте статистический и содержательный вывод. Можно ли считать, что эксперты ставят оценки согласованно?

Решение.

1. Расчет:

X	Y	K	L	$d_i = K - L$	d_i^2
10	8	6	4	2	4
8	9	4	5	-1	1
6	3	3	1	2	4
4	5	2	3	-1	1
3	4	1	2	-1	1
9	10	5	6	-1	1

$$\sum d_i^2 = 12$$

$$R_{\text{Спирмена}} = 1 - \frac{6 \cdot 12}{6(6^2 - 1)} = 1 - 0.33 = 0.67.$$

Прямая согласованность рангов, связь умеренная (ближе к сильной).

2. $H_0 : \rho = 0$, $H_1 : \rho \neq 0$.

$$z_{набл} = R_{\text{Спирмена}} \cdot \sqrt{n-1} = R_{\text{Спирмена}} \cdot \sqrt{6-1} = 0.67 \cdot \sqrt{5} \approx 1.83.$$

$$\text{p-value} = P(|z| > z_{\text{набл}}) = 2 \cdot P(z > z_{\text{набл}}) = 2 \cdot (1 - P(z < z_{\text{набл}})) =$$
$$= 2 \cdot (1 - \Phi(1.83)) = 2 \cdot (1 - 0.9664) = 0.0672.$$

Примем уровень значимости равный 5%.

$$\text{p-value} > 0.05 \Rightarrow$$

Нулевая гипотеза не отвергается, коэффициент равен 0, связи нет. Казалось бы, эксперты ставят оценки согласованно: они ставят высокие оценки одним и тем же абитуриентам, и наоборот. Но: коэффициент незначим, поэтому такой вывод о согласованности сделать нельзя.

Задача 9. Дана таблица сопряженности двух признаков: *пол респондента* и его ответ на вопрос: «*Любите ли вы горький шоколад?*».

	Да	Нет
Женский	32	14
Мужской	15	25

(a) Вам необходимо проверить, есть ли связь между этими признаками. Сформулируйте нулевую и альтернативную гипотезу. Какое распределение имеет статистика критерия, используемого для проверки нулевой гипотезы?
(b) Проверьте сформулированную нулевую гипотезу, используя p-value. Сделайте статистический и содержательный вывод.

Решение.

1. H_0 : признаки независимы.
   H_1 : признаки не независимыми (связаны).
   Распределение хи-квадрат с df $= 1$ или просто z-квадрат.
2. $$z^2_{\text{набл}} = \frac{(n_{11} \cdot n_{22} - n_{12} \cdot n_{21})^2 \cdot N}{n_{1.} \cdot n_{n.1} \cdot n_{.2} \cdot n_{2.}} = \frac{(32 \cdot 25 - 15 \cdot 14)^2 \cdot 86}{46 \cdot 40 \cdot 47 \cdot 39} \approx 8.88^3.$$

$$\text{p-value} = P(z^2 > 8.88) = P(|z| > \sqrt{8.88}) = 2 \cdot P(z > \sqrt{8.88}) = 2 \cdot P(z > 2.98) =$$
$$= 2 \cdot (1 - \Phi(2.98)) = 2 \cdot (1 - 0.9985) = 0.003.$$

На любом уровне значимости (1%, 5%, 10%) нулевую гипотезу следует отвергнуть, так как p-value («жизнеспособность» нулевой гипотезы) всегда меньше уровня значимости (0.01, 0.05, 0.1). Признаки связаны.

Задача 10. Известно, что коэффицент корреляции Пирсона между индексом политических свобод (принимает значения от 1 до 100) и ВВП на душу населения равен 0.76. Проверьте на 5% уровне значимости гипотезу о равенстве истинного значения коэффициента корреляции нулю, если известно, что коэффициент был посчитан на основе данных по 24 странам.

Решение.

$$t_{набл} = \frac{R}{\sqrt{1 - R^2}} \cdot \sqrt{n - 2} = \frac{0.76}{\sqrt{1 - 0.76^2}} \cdot \sqrt{22} \approx 5.48.$$

$$H_0 : \rho = 0, \; H_1 : \rho \neq 0.$$

$$t_{крит} = t_{0.975,\ \text{df}=24-2} = 2.074.$$

$$t_{набл} > t_{крит} \Rightarrow$$

нулевая гипотеза отвергается, связь есть.

Задача 11. Найдите:
(a) $P(Z < 1.12)$, $P(Z > 2.32)$, $P(Z < 4.82)$, $P(Z < -0.89)$.

[3] Если решать через сравнение наблюдаемых и ожидаемых частот, получится такое же значение (если кто решает такие задачи по примерам из синего задачника. Формулы эквивалентны; если запишете решение через сравнение наблюдаемых и ожидаемых частот в общем виде и попробуете упростить, привести все к общему знаменателю (это долго), получится именно та формула для $z^2_{\text{набл}}$, которая приведена здесь.

(b) $P(T < 0)$, $P(T > 0)$.

где Z – стандартная нормальная величина, T – величина, имеющая распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\mathrm{df} = 12$.

Решение.

1. 0.8686, 0.0102, 1, 0.1867
2. 0.5, 0.5

Задача 12. Известно, что оценки студентов за тест по курсу «Категории политической науки» имеют нормальное распределение со средним значением 6 и дисперсией 4. Из всех студентов независимо выбирают 100 выборок по 100 человек в каждой. Какое распределение будет иметь набор средних значений, посчитанных по этой выборке? С какими параметрами?

Решение. Набор средних значений будет иметь нормальное распределение со средним значением 6 и дисперсией $4/100$ (стандартным отклонением $2/10$). Ответ получен с помощью центральной предельной теоремы.

Задача 13. Сотрудники социологического агенства «НЕ (В)ОПРОС» по результатам опроса выяснили, что 87% респондентов верят в то, что если дорогу перебежит черная кошка – это к неудаче. Найдите вероятность того, что в выборке из 1200 респондентов будет от 600 до 1000 человек, которые верят в эту примету.

Решение. $p = 0.87$, $q = 0.13$, $np = 1044$, $\sqrt{npq} = \approx 12$ Используем теорему Муавра-Лапласа.

$$P(600 < S < 1000) = P(\frac{600 - 1044}{12} < Z < \frac{1000 - 1044}{12}) = P(-37 < Z < -3.6) = \Phi(37) - \Phi(3.6) \approx 0.$$