Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018—19 уч. год
Математический анализ — 1
Домашнее задание №4
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих
Фамилия и имя студента: Буторин Егор Иванович

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. Работа после срока не принимается.

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. Найти значение интеграла

$$\int_0^\infty x^n e^{-2x+3}\,dx$$

a. для $n = 0, 1, 2$ и 3.
b. для произвольного натурального n (используйте индукцию).

Задача 2. Рассмотрим снежинку Коха, которая строится следующим образом. На первом этапе у нас есть равносторонний треугольник с длиной стороны 1. На втором этапе к середине каждого треугольника снаружи мы прикрепляем по равностороннему треугольника с длиной стороны 1/3. Отрезки, оставшиеся внутри получившейся фигуры, стираем, получаем невыпуклый многоугольник. На третьем этапе к каждой из сторон получившегося многоугольника мы прикрепляем снаружи равносторонний треугольник с длиной стороны 1/9. И так далее, см. рисунок 1.

Обозначим многоугольник (вместе с его внутренностью), полученный на k-м шаге этого процесса, через K_k. Объединение всех K_k и будет снежинкой Коха.
a. Найти площадь $S(K_k)$ многоугольника K_k для каждого k. Найти $\lim_{k\to\infty} S(K_k)$.
b. Найти периметр $P(K_k)$ многоугольника K_k для каждого k. Найти $\lim_{k\to\infty} P(K_k)$.
Эта задача показывает, что бывают фигуры с бесконечным периметром, но конечной площадью. Снежинка Коха — один из примеров *фрактальных множеств*.

Задача 3. Найти интегралы
a. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 8x \cos 6x\,dx$.

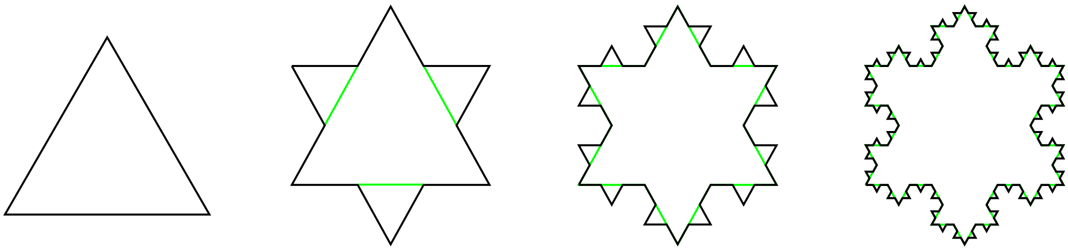

Рис. 1: Построение снежинки Коха, by Wxs @ Wikimedia Commons | CC BY-SA

b. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 8x \sin 6x \, dx$.

c. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 8x \sin 8x \, dx$.

Подсказка: пункт a) решается устно; в пункте b) дважды примените формулу интегрирования по частям: получится уравнение на искомый интеграл, оно задаёт значение этого интеграла однозначно; в пункте c) может быть полезна формула $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$.

Задача 4. Конечным рядом Фурье называется сумма

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — какие-то числа.

Докажите, что a_m можно найти по формуле

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx.$$

Оказывается, с помощью бесконечного ряда такого же вида можно представить любую дифференцируемую нечётную периодическую функцию.

Задача 5. Докажите, что

a. $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$ для любой функции f, непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ (то есть функция должна быть дифференцируемой, а её производная — непрерывной на этом отрезке), и любого $x \in [a, b]$

b. $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)\, dt$ для любой функции f, дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$. **Подсказка:** Используйте интегрирование по частям.

c. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$ для любой функции f, $n+1$ раз непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$.

 Фамилия и имя студента: Буторин Егор Иванович