

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018—19 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №4

И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих

Фамилия и имя студента: Авраменко София Викторовна

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. Работа после срока не принимается.

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо сверстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

## Задачи

**Задача 1.** Найти значение интеграла

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-4x+3} dx$$

- для  $n = 0, 1, 2$  и  $3$ .
- для произвольного натурального  $n$  (используйте индукцию).

**Задача 2.** Рассмотрим снежинку Коха, которая строится следующим образом. На первом этапе у нас есть равносторонний треугольник с длиной стороны 1. На втором этапе к середине каждого треугольника снаружи мы прикрепляем по равностороннему треугольнику с длиной стороны  $1/3$ . Отрезки, оставшиеся внутри получившейся фигуры, стираем, получаем невыпуклый многоугольник. На третьем этапе к каждой из сторон получившегося многоугольника мы прикрепляем снаружи равносторонний треугольник с длиной стороны  $1/9$ . И так далее, см. рисунок 1.

Обозначим многоугольник (вместе с его внутренностью), полученный на  $k$ -м шаге этого процесса, через  $K_k$ . Объединение всех  $K_k$  и будет снежинкой Коха.

- Найти площадь  $S(K_k)$  многоугольника  $K_k$  для каждого  $k$ . Найти  $\lim_{k \rightarrow \infty} S(K_k)$ .
- Найти периметр  $P(K_k)$  многоугольника  $K_k$  для каждого  $k$ . Найти  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(K_k)$ .

Эта задача показывает, что бывают фигуры с бесконечным периметром, но конечной площадью. Снежинка Коха — один из примеров *фрактальных множеств*.

**Задача 3.** Найти интегралы

- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 4x \cos 5x dx$ .

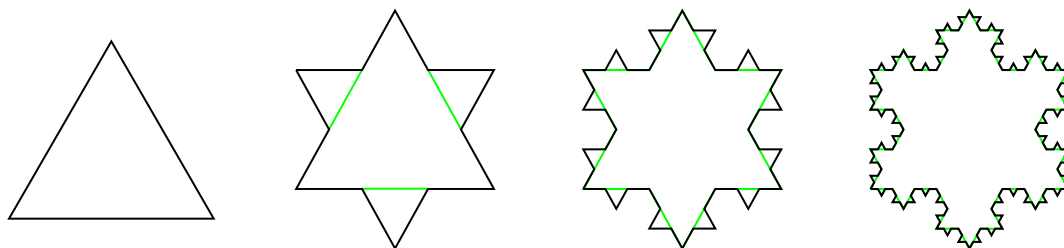


Рис. 1: Построение снежинки Коха, by Wxs @ Wikimedia Commons | CC BY-SA

b.  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 4x \sin 5x dx.$   
 c.  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 4x \sin 4x dx.$

**Подсказка:** пункт а) решается устно; в пункте б) дважды примените формулу интегрирования по частям: получится уравнение на искомый интеграл, оно задаёт значение этого интеграла однозначно; в пункте с) может быть полезна формула  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ .

**Задача 4.** Конечным рядом Фурье называется сумма

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin nx,$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — какие-то числа.

Докажите, что  $a_m$  можно найти по формуле

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx.$$

*Оказывается, с помощью бесконечного ряда такого же вида можно представить любую дифференцируемую нечётную периодическую функцию.*

**Задача 5.** Докажите, что

а.  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$  для любой функции  $f$ , непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[a, b]$  (то есть функция должна быть дифференцируемой, а её производная — непрерывной на этом отрезке), и любого  $x \in [a, b]$

б.  $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x (x - t)f''(t) dt$  для любой функции  $f$ , дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[a, b]$ . **Подсказка:** Используйте интегрирование по частям.

с.  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$  для любой функции  $f$ ,  $n + 1$  раз непрерывно дифференцируемой на  $[a, b]$ .