Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018—19 уч. год
Математический анализ — 1
Домашнее задание №3
И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих
Фамилия и имя студента: Буйлова Анна

Правила

Academic ethics policy. Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

Deadline policy. Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где x_0 — оценка без учёта штрафа, t — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

Typography policy. Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Задачи

Задача 1. (10 баллов за каждый пункт) Провести полное исследование функции. Найти её область определения, экстремумы (и значения в экстремумах), промежутки монотонности, асимптоты (вертикальные, горизонтальные, диагональные), точки разрывов. Определить типы разрывов. Во всех пунктах, кроме (c), найти промежутки выпуклости и точки перегиба. На основе полученной информации построить график функции, отметить на нём точки экстремумов, точки перегиба, асимптоты.

a. $f(x) = 8x^3 + 36x^2 + 48x + 18$;
b. $f(x) = \frac{4x^2+16x+17}{2x+4}$;
c. $f(x) = \cos(\ln(4x^2 + 8x + 8))$;
d. $f(x) = 4x^2 + 2x + \ln(-2x + 1) - 2$;
e. $f(x) = e^{-4x^2-16x-16}$.
f. $f(x) = \exp\left(\frac{-2x-4}{-4x^2-16x-15}\right)$

Задача 2. (5+10 баллов) Докажите, что у уравнения

$$x^{11} = e^{-x} + 3\sin\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{10}\right)$$

a. есть корень;
b. он ровно один.

Подсказка к пункту (b). Можно вычесть левую часть из правой и доказать, что производная получившейся функции везде положительна. Для этого нужно внимательно посмотреть, какие слагаемые как можно оценить при различных значениях x.

Определение 1. Функция называется *чётной*, если для любого x из области определения f, $f(x) = f(-x)$.

Определение 2. Функция называется *нечётной*, если для любого x из области определения f, $f(x) = -f(-x)$.

Замечание. График чётной функции симметричен относительно вертикальной оси, график нечётной симметричен относительно начала координат.

Задача 3. (15 баллов) Докажите, что ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$ для чётной функции содержит только чётные степени x, а для нечётной — только нечётные.

Задача 4. (20 баллов) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|2x+10|}\right), & x \neq -5 \\ 0, & x = -5. \end{cases}$$

Докажите, что эта функция является дифференцируемой в точке $x = -5$ сколько угодно раз, найдите все её производные в этой точке и выпишите её ряд Тейлора в этой точке.

Задача 5. (10 баллов за каждый пункт) Найти предел

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{32x^3}{3} - 4x + \sin(4x)}{-\frac{2x^4}{3} - \frac{4x^3}{3} - 2x^2 - 2x + e^{2x} - 1}$;

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{25x^2}{2} - 5x + e^{4x^4+5x} - 1}{-5x + \sin(3x^4 + 5x)}$;

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-5x + e^{2x^2+5x} - 1}{-5x + \sin(5x^2 + 5x)}$.

Задача 6. (10 баллов) Про функцию f известно, что она дважды дифференцируема для $x \geqslant 0$, $f(0) = -2$ и $f'(0) = 4$ и $f''(x) > 6$ для всех $x \geqslant 0$. Докажите, что для всех $x > 0$, $f(x) > 3x^2+4x-2$.