

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018—19 уч. год

Математический анализ — 1

Домашнее задание №2

*И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих*

Фамилия и имя студента: Вареников Дмитрий Дмитриевич

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле  $x(t) = x_0 e^{-t}$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Для оформления задач 1 и 2 нужно распечатать условие, построить графики ручкой на распечатке, добавить необходимые комментарии, отсканировать и перевести в PDF.

### Задачи

**Задача 1.** (16 баллов) На рисунке 1 изображен график функции  $y = f(x)$ .

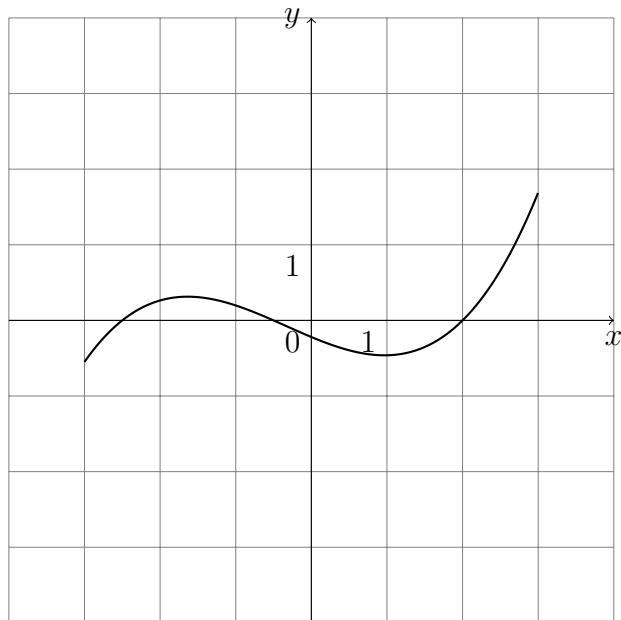


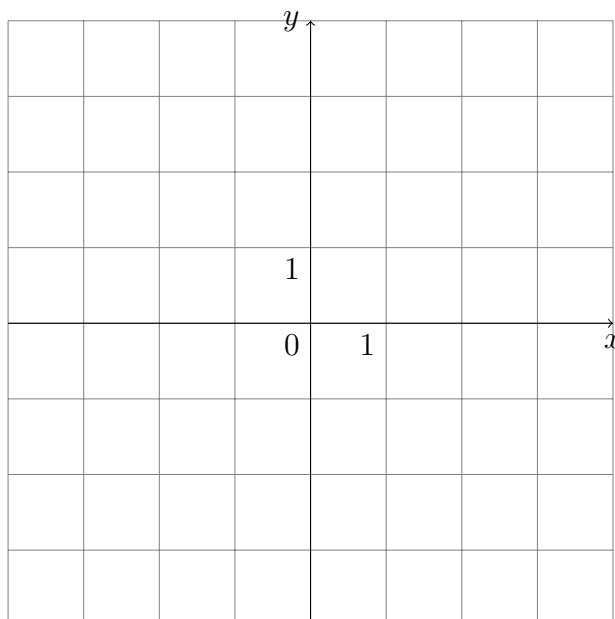
Рис. 1: Рисунок к задаче 1

а. Заполнить по графику таблицу значений функций (находить значения можно примерно):

$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$													

б. Рассмотрим функцию  $g(x) = f(x) + 1$ . Чему равно  $g(0)$ ?  $g(1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $g(x)$  и  $f(x)$ ?

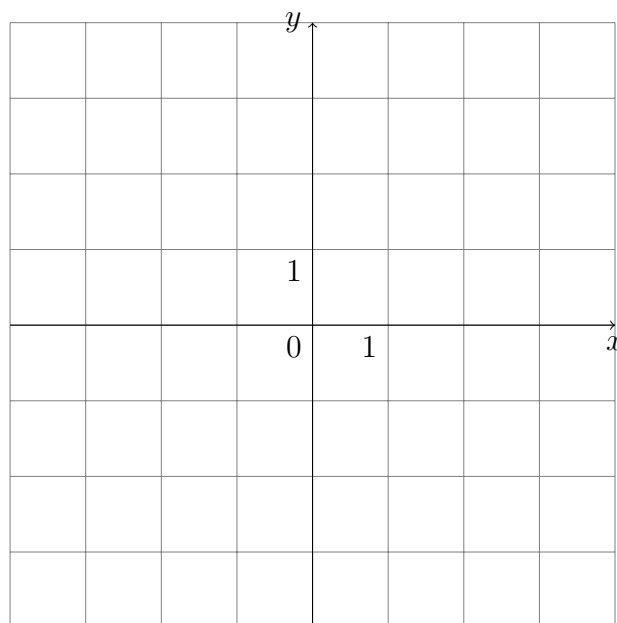
$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$g(x)$													



Ответ:

c. Рассмотрим функцию  $h(x) = 2f(x)$ ; Чему равно  $h(0)$ ?  $h(1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $h(x)$ ?

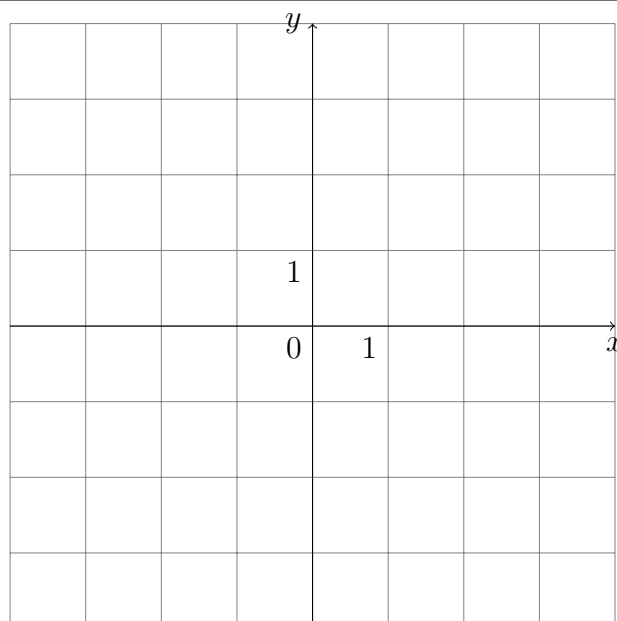
$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(x)$													



*Ответ:*

d. Рассмотрим функцию  $u(x) = f(x + 1)$ ; Чему равно  $u(0)$ ?  $u(-1)$ ?  $u(1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $u(x)$ ?

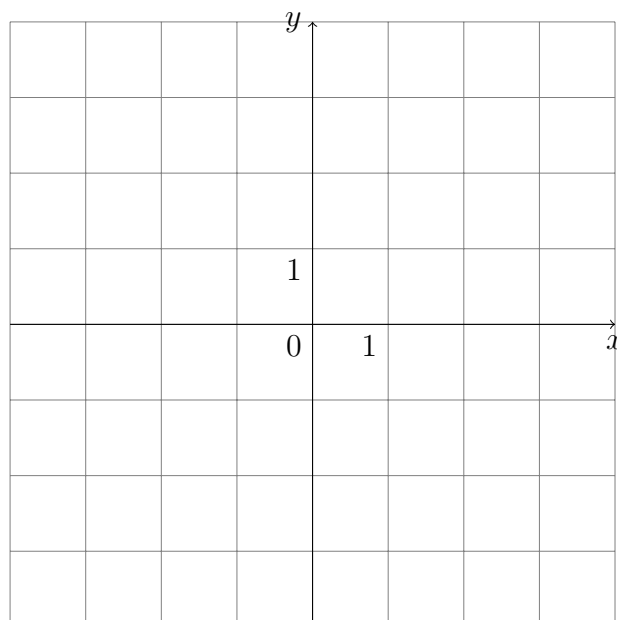
$x$	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$u(x)$													



*Ответ:*

е. Рассмотрим функцию  $v(x) = f(2x)$ ; Чему равно  $v(0)$ ?  $v(1)$ ?  $v(0,5)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $v(x)$ ?

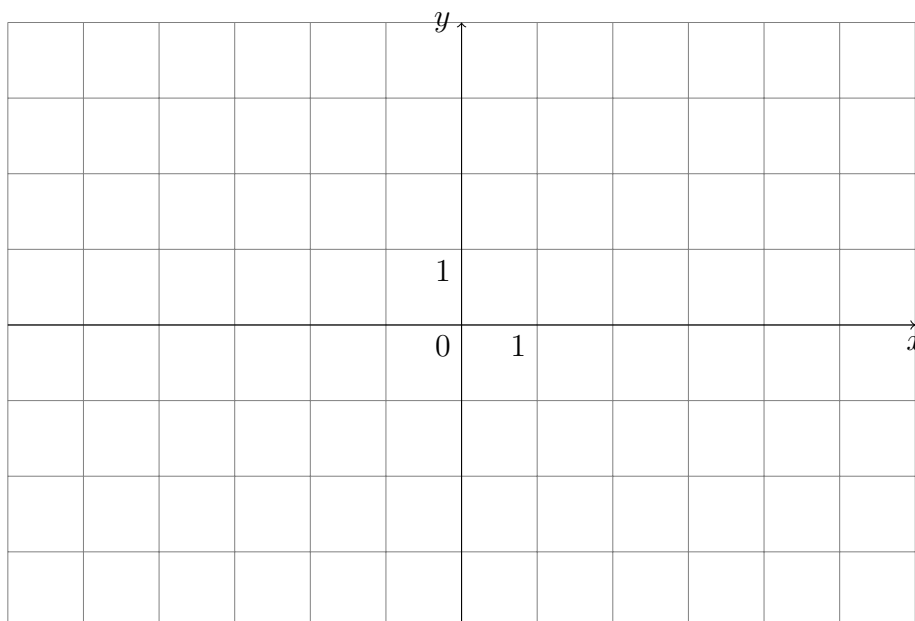
$x$	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
$v(x)$							



Ответ:

ф. Рассмотрим функцию  $z(x) = f(x/2)$ ; Чему равно  $z(0)$ ?  $z(1)$ ?  $z(-1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $z(x)$ ?

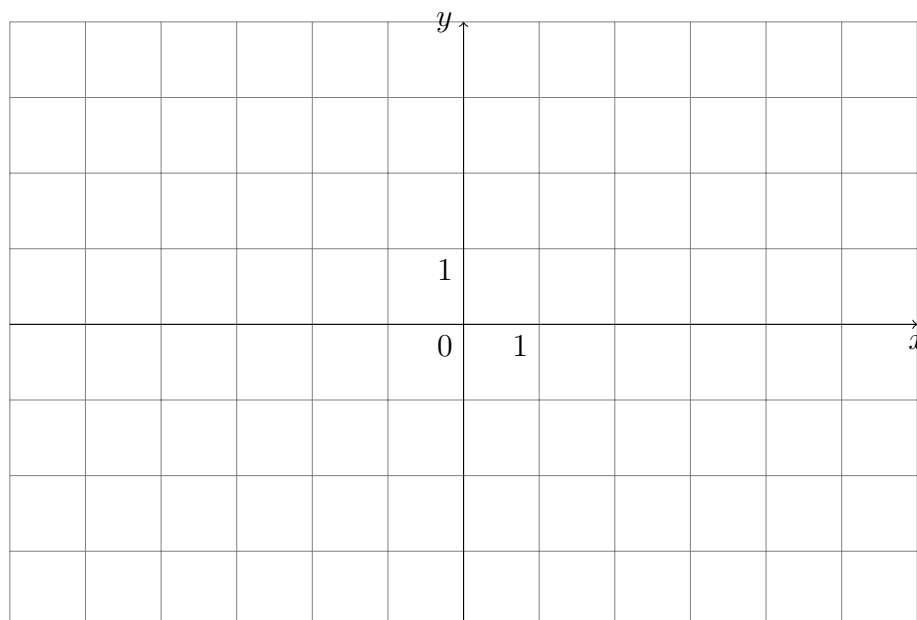
$x$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$z(x)$													



Ответ:

g. Рассмотрим функцию  $m(x) = |f(x)|$ ; Чему равно  $m(0)$ ?  $m(1)$ ?  $m(-1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $m(x)$ ?

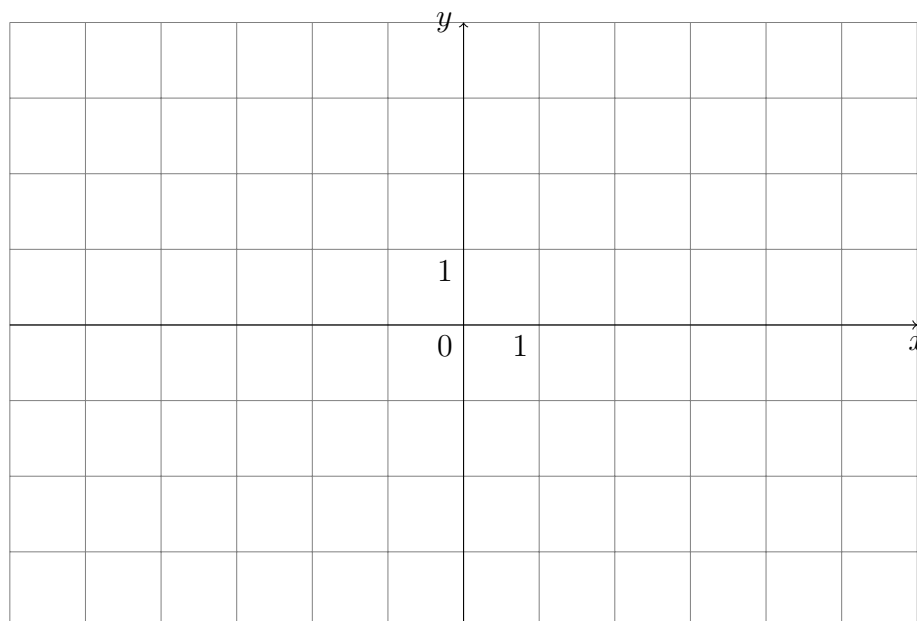
$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(x)$													



Ответ:

h. Рассмотрим функцию  $r(x) = f(|x|)$ ; Чему равно  $r(0)$ ?  $r(1)$ ?  $r(-1)$ ? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций  $f(x)$  и  $r(x)$ ?

$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(x)$													



Ответ:

**Задача 2.** (4 балла)

На рисунке 2 изображён график функции  $y = f(x)$ . Рассмотрим функцию  $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ .

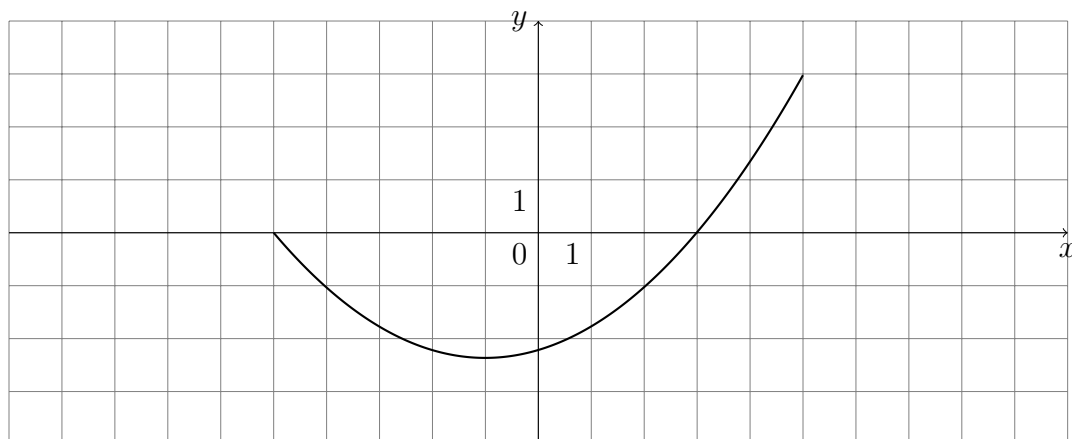


Рис. 2: Рисунок к задаче 2

- Найти область определения функции  $g(x)$ .
- Найти значение функции  $g(x)$  в нескольких (как минимум пяти) различных точках из области определения.
- Построить график  $g(x)$ .
- Какие точки на графике функции  $f(x)$  переходят в точки на графике  $g(x)$  с абсциссой  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$ ? Какие точки остаются на месте?
- Описать словами, что надо сделать с графиком функции  $f(x)$ , чтобы получить график функции  $g(x)$ .

*Решение:*

**Задача 3.** (12 баллов) Запишите в кванторах определение (по Коши) следующего утверждения. Обратите внимание на разницу между знаками  $\infty$ ,  $+\infty$  и  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5.$$

Придумайте и запишите определение по Гейне для того же факта. Докажите эквивалентность двух определений.

**Задача 4.** (12 баллов) Доказать равенство, используя определение предела по Коши.

$$\lim_{x \rightarrow -3} x^4 = 81.$$

**Задача 5.** (12 баллов) Докажите, пользуясь определением предела по Коши, что если

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$$

и

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = b,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(f(x)) = b.$$

(Здесь  $b$  — произвольное вещественное число.)

**Задача 6.** (6 баллов) Вычислить предел или доказать, что его не существует. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), докажите это. Можете пользоваться предыдущей задачей.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sin \left( 0.4 \left| \frac{4}{x+2} \right| \right)$$