**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2018—19 уч. год**
**Математический анализ — 1**
**Домашнее задание №2**
*И. Щуров, М. Матушко, И. Машанова, И. Эрлих*
**Фамилия и имя студента: Лисняк Ярослав Андреевич**

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** Срок сдачи работы указан в my.NES и не будет переноситься. В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться по формуле $x(t) = x_0 e^{-t}$, где $x_0$ — оценка без учёта штрафа, $t$ — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо свёрстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

Для оформления задач 1 и 2 нужно распечатать условие, построить графики ручкой на распечатке, добавить необходимые комментарии, отсканировать и перевести в PDF.

## Задачи

**Задача 1.** (16 баллов) На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$.

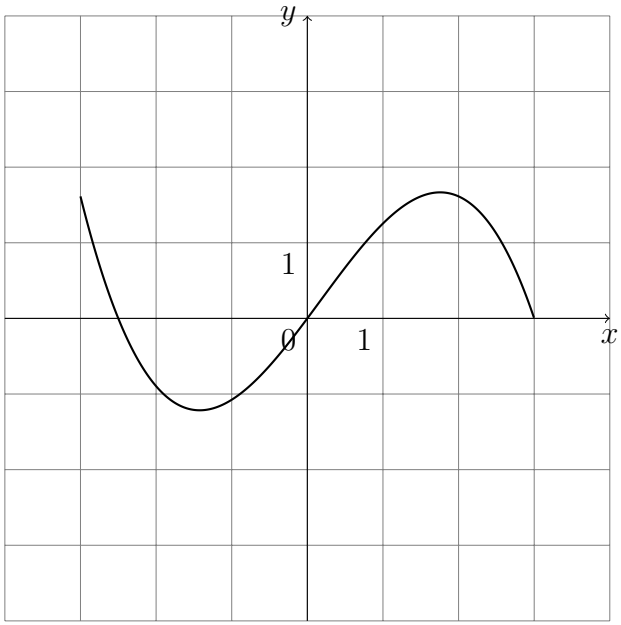


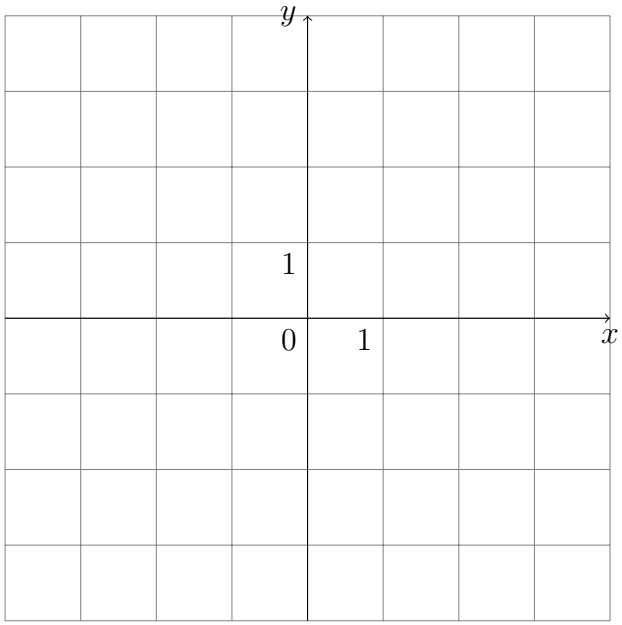

Рис. 1: Рисунок к задаче 1

a. Заполнить по графику таблицу значений функций (находить значения можно примерно):

| $x$ | $-3$ | $-2{,}5$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ | $2$ | $2{,}5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | | | |

b. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) + 1$. Чему равно $g(0)$? $g(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $g(x)$ и $f(x)$?

| $x$ | $-3$ | $-2{,}5$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ | $2$ | $2{,}5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | | | | | | | | | |

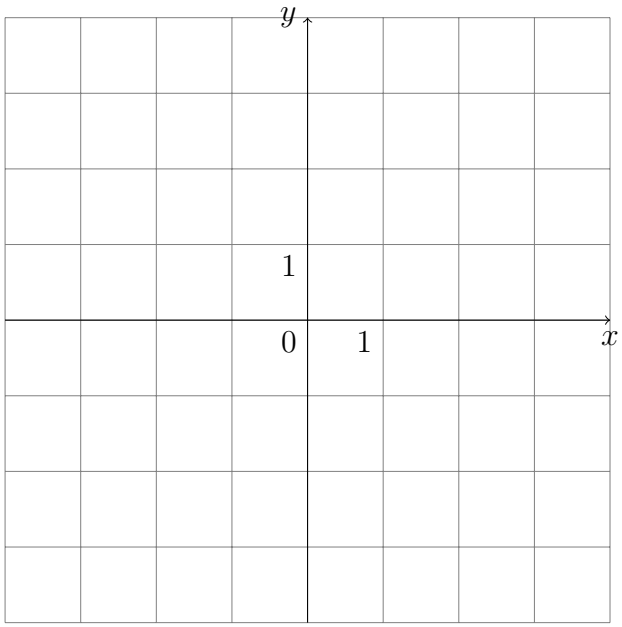



*Ответ:*

 Фамилия и имя студента: Лисняк Ярослав Андреевич

c. Рассмотрим функцию $h(x) = 2f(x)$; Чему равно $h(0)$? $h(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $h(x)$?

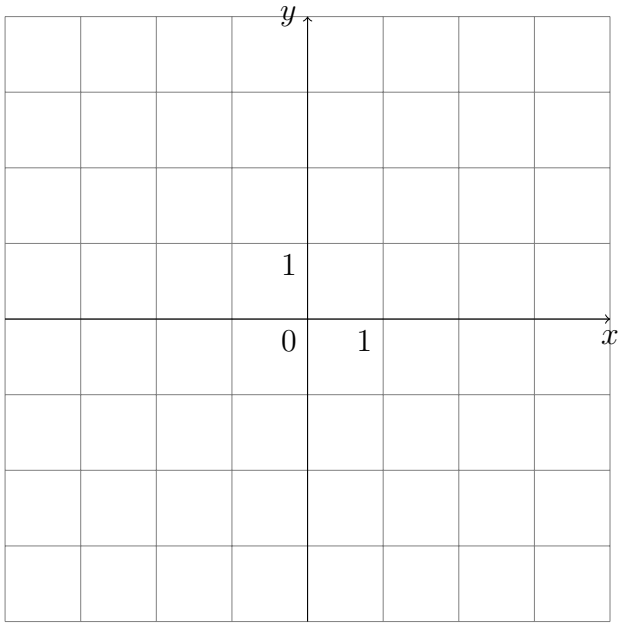
| $x$ | $-3$ | $-2{,}5$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ | $2$ | $2{,}5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | | | | | | | | | | | | |




*Ответ:*

d. Рассмотрим функцию $u(x) = f(x+1)$; Чему равно $u(0)$? $u(-1)$? $u(1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $u(x)$?

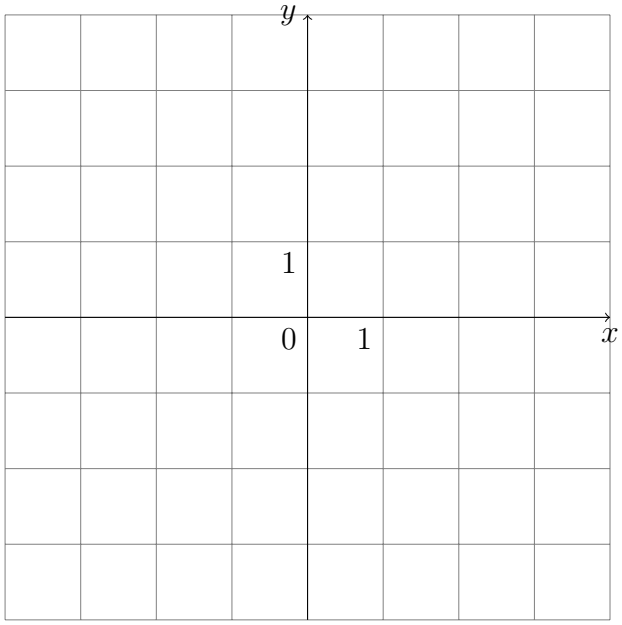
| $x$ | $-4$ | $-3{,}5$ | $-3$ | $-2{,}5$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | | | | | | | | | | | | | |




*Ответ:*

e. Рассмотрим функцию $v(x) = f(2x)$; Чему равно $v(0)$? $v(1)$? $v(0{,}5)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $v(x)$?

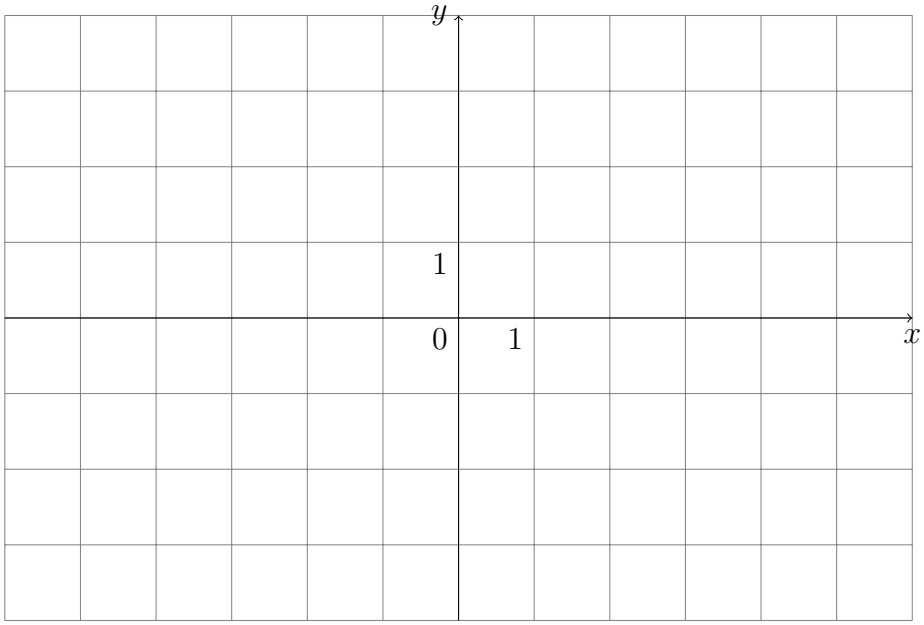
| $x$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(x)$ | | | | | | | |




*Ответ:*

f. Рассмотрим функцию $z(x) = f(x/2)$; Чему равно $z(0)$? $z(1)$? $z(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $z(x)$?

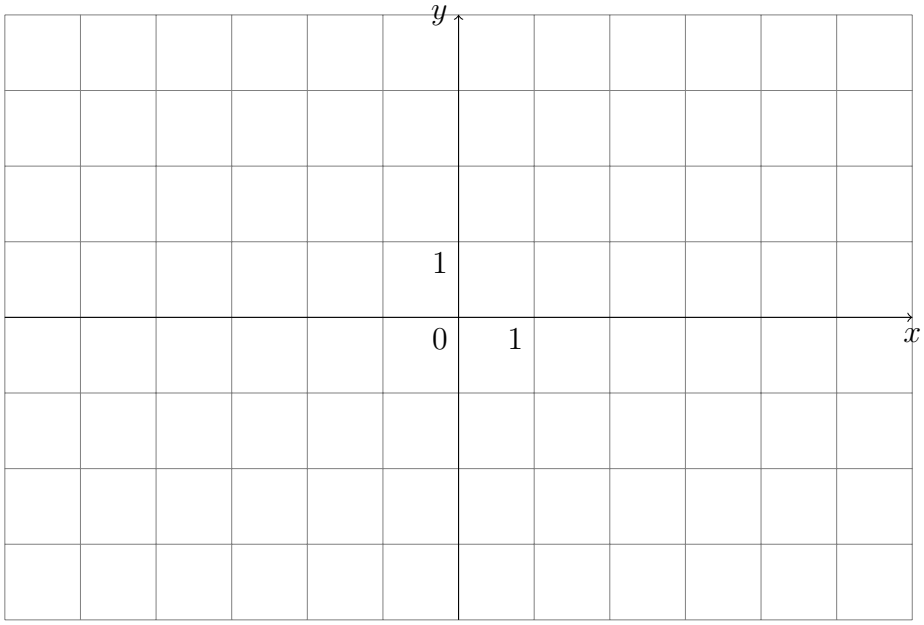
| $x$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z(x)$ | | | | | | | | | | | | | |




*Ответ:*

g. Рассмотрим функцию $m(x) = |f(x)|$; Чему равно $m(0)$? $m(1)$? $m(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $m(x)$?

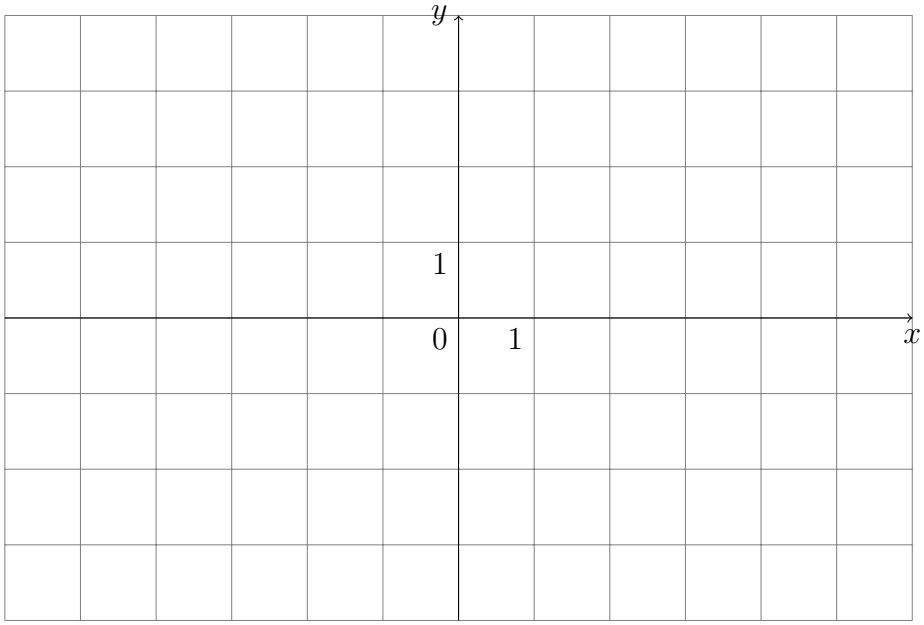
| $x$ | $-3$ | $-2{,}5$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ | $2$ | $2{,}5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | | | | | | | | | | | | |




*Ответ:*

h. Рассмотрим функцию $r(x) = f(|x|)$; Чему равно $r(0)$? $r(1)$? $r(-1)$? Заполнить для неё таблицу значений (см. ниже) и построить график. Как соотносятся графики функций $f(x)$ и $r(x)$?

| $x$ | $-3$ | $-2{,}5$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $0{,}5$ | $1$ | $1{,}5$ | $2$ | $2{,}5$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | | | | | | | | | | | | |




*Ответ:*

**Задача 2.** (4 балла)

На рисунке 2 изображён график функции $y = f(x)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(2x + 2)$.

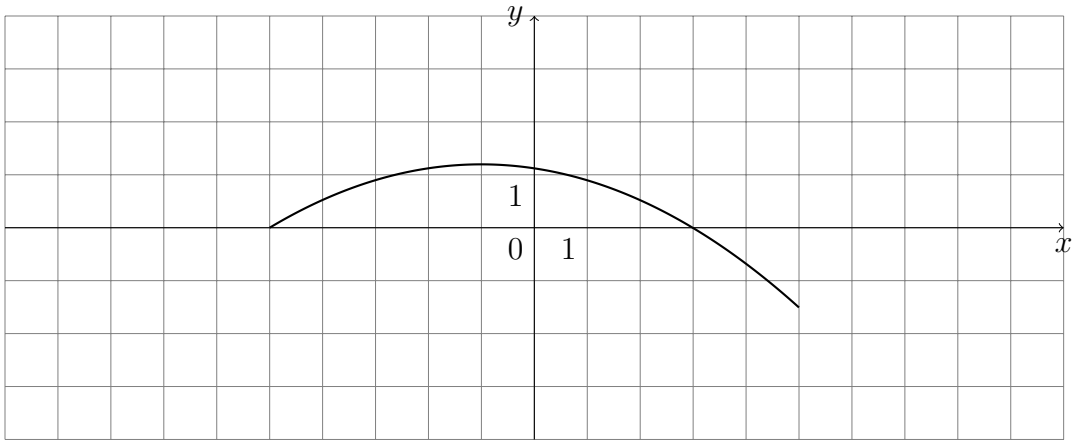



Рис. 2: Рисунок к задаче 2

a. Найти область определения функции $g(x)$.
b. Найти значение функции $g(x)$ в нескольких (как минимум пяти) различных точках из области определения.
c. Построить график $g(x)$.
d. Какие точки на графике функции $f(x)$ переходят в точки на графике $g(x)$ с абсциссой $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$? Какие точки остаются на месте?
e. Описать словами, что надо сделать с графиком функции $f(x)$, чтобы получить график функции $g(x)$.

*Решение:*

**Задача 3.** (12 баллов) Запишите в кванторах определение (по Коши) следующего утверждения. Обратите внимание на разницу между знаками $\infty$, $+\infty$ и $-\infty$.

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty.$$

Придумайте и запишите определение по Гейне для того же факта. Докажите эквивалентность двух определений.

**Задача 4.** (12 баллов) Доказать равенство, используя определение предела по Коши.

$$\lim_{x\to 3} x^3 = 27.$$

**Задача 5.** (12 баллов) Докажите, пользуясь определением предела по Коши, что если

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$$

и

$$\lim_{y\to \infty} g(y) = -\infty,$$

то

$$\lim_{x\to -\infty} g(f(x)) = -\infty.$$

**Задача 6.** (6 баллов) Вычислить предел или доказать, что его не существует. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), докажите это. Можете пользоваться предыдущей задачей.

$$\lim_{x\to -\infty} -\sqrt{\left(1+e^{-2x}\right)^4+1}$$

 Фамилия и имя студента: Лисняк Ярослав Андреевич