НИУ ВШЭ, Факультет гуманитарных наук, 2018-19 уч. год.
Дискретная математика для лингвистов
Письменная домашняя работа №3
Фамилия и имя: ______________________________
Вариант: Аблогин Михаил Алексеевич

Правила

Во всех задачах требуется приводить решение и ответ. Задача без решения не засчитывается. Задача без ответа не засчитывается.

Желаем удачи!

Задание

Задача 1. Сколько попарно неизоморфных простых графов, содержащих 14 вершин и 87 ребер существует?

Задача 2. В далёком государстве 75 городов, причём из каждого выходит не менее 38 автодорог, соединяющих с другими городами этого же государства (два города связаны не более чем одной дорогой, дороги двусторонние). Может ли путешественник объехать все города на машине?

Задача 3. Каждый из 192 студентов курса знаком не менее чем с 153 другими. Докажите, что среди них найдутся 5 студентов, имеющие одинаковое число знакомых.

Задача 4. Существует ли многогранник с нечётным числом граней, все грани которого — многоугольники с нечётным числом сторон.

Задача 5. Какое наименьшее число ребер надо удалить из полного графа на 12 вершинах, чтобы в получившемся графе не было ни одного цикла?

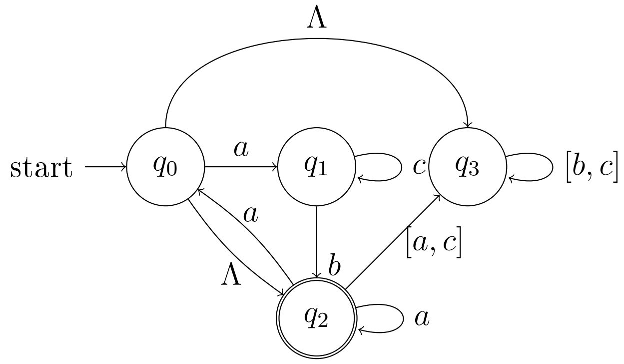
Задача 6. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$, $L_1 = (c \cup ab)^* \cdot b$, $L_2 = (dd \cup bd \cup dc) \cdot c^*$. Построить диаграммы и конечные автоматы, задающие следующие языки:
a. L_1;
b. L_2;
c. $\mathrm{C}L_1$;
d. $L_1 \cup L_2$;
e. $L_2 \cdot L_1$;
f. $(L_2)^*$.
Для упрощения изображений (диаграмм) можно вводить обозначения для уже построенных диаграмм в предыдущих пунктах (но даже в этом случае надо обязательно указывать начальную и финальные вершины для этих диаграмм)

Задача 7. Пусть $A = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $Q' = \{q_1, q_2\}$, функция $G : A \times Q \to Q$ задаётся следующим образом:

$$G(a, q_0) = q_2;$$
$$G(b, q_0) = q_2;$$
$$G(a, q_1) = q_3;$$
$$G(b, q_1) = q_2;$$
$$G(a, q_2) = q_1;$$
$$G(b, q_2) = q_3;$$
$$G(a, q_3) = q_1;$$
$$G(b, q_3) = q_1.$$

Нарисовать диаграмму для автомата (A, Q, G, q_0, Q') и написать регулярное выражение для языка, представимого этим автоматом.

Задача 8. Язык задан диаграммой



Построить конечный автомат, который представляет тот же самый язык. Написать регулярное выражение для этого языка.

Задача 9. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{0, 1\}$. Привести пример распределения частот букв для алфавита A, при котором при кодировании его в алфавите B существует оптимальный код, содержащий однобуквенное слово и оптимальный код, не содержащий однобуквенного слова.

Задача 10. По каналу передавалось кодовое слово, построенное по методу Хэмминга. Ошибок не более одной. Могло ли придти следующее слово? Если да, то какое было исходное сообщение?
- a. 1100110000
- b. 0100010110
- c. 0001000111

Задача 11. Построить оптимальный алфавитный код (код с минимальной избыточностью), буквы кодируемого алфавита имеют следующие частоты выпадения: 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.07, 0.08, 0.1, $0.11, 0.11, 0.12, 0.16$, кодирующий алфавит состоит из четырёх букв.

Задача 12. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ — множество вершин некоторого графа G. Определим на множестве V двуместный предикат $P(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y соединены ребром. Определим на множестве V двуместный предикат $R(x, y)$, который принимает значение «ИСТИНА» тогда и только тогда, когда вершины x и y совпадают.

Используя предикаты $P(x, y)$, $R(x, y)$, функции алгебры логики, кванторы всеобщности и существования, запишите следующее (везде расматривается простой граф)
- a. Граф V является двудольным.
- b. Граф V является деревом.

Задача 13. Выяснить, существует ли $q-$ичный код с минимальной избыточностью (оптимальный код), обладающий заданной последовательностью L длин кодовых слов:
- a. $q = 3$, $L = (1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$;
- b. $q = 3$, $L = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3)$;
- c. $q = 2$, $L = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 6)$.

Задача 14. Являются ли следующие языки регулярными?
- a. Язык над алфавитом $A = \{a, b\}$, содержащий все слова, в которых в которых букв a в 3 раза больше, чем букв b и не содержащий никаких других.
- b. Язык над алфавитом $A = \{a, b\}$, содержащий все слова, в которых идёт не менее трёх одинаковых букв подряд и не содержащий никаких других.