

Факультет компьютерных наук, ПМИ, 2018-19 учебный год

Дифференциальные уравнения

Домашнее задание №А

И. В. Щуров, А. А. Айзенберг, М. И. Ронжина, И. С. Шилин

Фамилия и имя студента: Попов Антон Дмитриевич

## Правила

**Academic ethics policy.** Попытка сдать хотя бы частично списанный текст будет рассматриваться как грубое нарушение принципов академической этики со всеми административными и репутационными последствиями.

**Deadline policy.** В случае сдачи работы после срока оценка будет определяться как решение  $x = x(t)$  дифференциального уравнения

$$\dot{x} = -x$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ , где  $x_0$  — оценка без учёта штрафа,  $t$  — количество дней, прошедших с момента дедлайна до момента сдачи работы (вещественное число).

**Typography policy.** Текст работы сдаётся исключительно в формате PDF. Работа с идеальным оформлением, набранная на компьютере, выглядящая как страница из хорошо сверстанной книги, получает бонус в 5% от числа набранных баллов. Картинки могут быть нарисованы на компьютере или вставлены в виде сканов. Работа с плохим оформлением (например, скан работы, написанной от руки), получает штраф в 5% от числа набранных баллов. Работа, чтение которой вызывает существенные затруднения (неразборчивый скан или фотография и т.д.), может быть возвращена на доработку без продления дедлайна.

**Grading policy.** Пишите, пожалуйста, полные решения со всеми необходимыми пояснениями. Это дополнительное ДЗ, входящее в накопленную оценку по категории «дополнительные штуки». Максимум за него можно набрать 10 баллов (если сделать все задачи).

## Задачи

**Задача 1.** Пусть  $z(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ . Рассмотрим систему  $\dot{z} = Az$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -15 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Указать все значения параметра  $\alpha \in \mathbb{R}$  (если такие есть), при которых особая точка  $(0, 0, 0)$  является

- асимптотически устойчивой;
- устойчивой по Ляпунову.

Если таких значений параметра  $\alpha$  нет, объяснить, почему.

**Warning:** при использовании теоремы об устойчивости по первому приближению, помните о том, что бывают случаи, когда она не даёт никакого однозначного ответа. Тем не менее, вам необходимо исследовать и эти случаи тоже.

**Задача 2.** Рассмотрим решение системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

с начальным условием  $x(0) = c, y(0) = b$ .

Найти все значения параметров  $a, b, c, d$ , при которых решение стремится к точке  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Задача 3.** Рассмотрим семейство уравнений, зависящее от  $\epsilon$ :

$$\dot{x} = \epsilon x + 3\epsilon - 6x - (x + 3)^3 - 18$$

- При каких значениях параметра  $\epsilon$  происходит бифуркация? (Иными словами, при каких значениях  $\epsilon$  система не является структурно устойчивой?)
- Как зависит устойчивость особой точки  $x = -3$  от параметра  $\epsilon$ ? Указать, при каких значениях параметра особая точка является асимптотически устойчивой, при каких устойчивой по Ляпунову, при каких является неустойчивой. Исследовать все случаи.
- Как зависит число различных фазовых кривых уравнения от параметра  $\epsilon$ ?

**Задача 4.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 3 \ln(x - 2) - 2; \\ \dot{y} = x - 9y^2 + 33y - 33. \end{cases}$$

- Построить эскиз фазового портрета системы вблизи особой точки  $(3, 2)$ .
- Является ли эта особая точка устойчивой по Ляпунову? Асимптотически устойчивой? Ответ обосновать.

**Задача 5.** Найти все значения параметра  $s$ , при которых у системы

$$\dot{x} = 8x + 7y, \quad \dot{y} = sx + 8y$$

имеется глобально определённый непостоянный непрерывный первый интеграл.

**Задача 6.** Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора с трением:

$$\ddot{x} = -6x - \alpha \dot{x},$$

где  $\alpha > 0$  — коэффициент трения (мы считаем, что сила трения пропорциональна скорости). Найти все значения параметра  $\alpha$ , при которых осциллятор проходит положение равновесия (точку  $x = 0$ ) бесконечно много раз.

**Задача 7.** Докажите или опровергните следующие утверждения:

- Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть особая точка, устойчивая по Ляпунову, то и у её малого возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.
- Если у вещественной системы дифференциальных уравнений на плоскости есть асимптотически устойчивая особая точка, то у её малого возмущения есть особая точка, устойчивая по Ляпунову.